Tópicos de Matemática Elementar: números reais

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073 / 2529-5095
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-85818-80-7

MUNIZ NETO, Antonio Caminha.

Tópicos de Matemática Elementar: números reais / Caminha Muniz Neto.
-2.ed. -- Rio de Janeiro: SBM, 2013.
v.1 ; 235 p.(Coleção Professor de Matemática; 24)
ISBN 978-85-85818-80-7

1. Conjunto dos Números e Equações. 2. Produtos Notáveis e Equações. 3. Sistemas de Equações. I. Título.

Tópicos de Matemática Elementar

Volume 1

Números Reais

Antonio Caminha Muniz Neto

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

2ª edição
2ª impressão
2014
Rio de Janeiro

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 1 - Números Reais* - A. Caminha
- Tópicos de Matemática *Elementar - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 - Introdução à Análise* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 - Combinatória* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 5 - Teoria dos Números* - A. Caminha

A meus filhos Gabriel e Isabela,
na esperança de que um dia leiam este livro.

Sumário

Prefácio

Prefácio à 2ª edição

1 O Conjunto dos Números Reais **1**

1.1 Aritmética em $\mathbb{R}$ 3
1.2 A relação de ordem em $\mathbb{R}$ 10
1.3 A completude do conjunto dos reais 17
1.4 A representação geométrica 22
1.5 Supremo e ínfimo 26

2 Produtos Notáveis e Equações **35**

2.1 Identidades algébricas 36
2.2 Módulo e equações modulares 47
2.3 Equações de segundo grau 51
2.4 Equações polinomiais 59

3 Sistemas de Equações **69**
3.1 Sistemas lineares e eliminação 70
3.2 Miscelânea 80

4 Sequências Elementares **89**
4.1 Fórmulas posicionais e recorrências 90
4.2 Progressões 92
4.3 Recorrências lineares de ordens 2 e 3 102
4.4 Somatórios e produtórios 113

5 Indução Finita **125**

6 Binômio de Newton **141**
6.1 Números binomiais 141
6.2 A fórmula do binômio 149

7 Desigualdades Elementares **159**
7.1 A desigualdade triangular 160
7.2 A desigualdade entre as médias 163
7.3 A desigualdade de Cauchy 177
7.4 Mais desigualdades 184

8 Soluções e Sugestões **201**

A Glossário **273**

Referências **275**

Índice Remissivo **281**

Prefácio

Esta coleção evoluiu a partir de sessões de treinamento para olimpíadas de Matemática, por mim ministradas para alunos e professores do Ensino Médio, várias vezes ao longo dos anos de 1992 a 2003 e, mais recentemente, como orientador do Programa de Iniciação Científica para os premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do Projeto Amílcar Cabral de cooperação educacional entre Brasil e Cabo Verde.

Idealmente, planejei o texto como uma mistura entre uma iniciação suave e essencialmente autocontida ao fascinante mundo das competições de Matemátia, além de uma bibliografia auxiliar aos estudantes e professores do secundário interessados em aprofundar seus conhecimentos matemáticos. Resumidamente, seu propósito primordial é apresentar ao leitor uma abordagem de quase todos os conteúdos geralmente constantes dos currículos do secundário, e que seja ao mesmo tempo concisa, não excessivamente tersa, logicamente estruturada e mais aprofundada que a usual.

Na estruturação dos livros, me ative à máxima do eminente matemático húngaro-americano George Pólya, que dizia não se poder fazer

Matemática sem *sujar as mãos*. Assim sendo, em vários pontos deixei a cargo do leitor a tarefa de verificar aspectos não centrais aos desenvolvimentos principais, quer na forma de detalhes omitidos em demonstrações, quer na de extensões secundárias da teoria. Nestes casos, frequentemente referi o leitor a problemas específicos, os quais se encontram marcados com * e cuja análise e solução considero parte integrante e essencial do texto. Colecionei ainda, em cada seção, outros tantos problemas, cuidadosamente escolhidos na direção de exercitar os resultados principais elencados ao longo da discussão, bem como estendê-los. Uns poucos destes problemas são quase imediatos, ao passo que a maioria, para os quais via de regra oferto sugestões ou soluções completas, é razoavelmente difícil; no entanto, insto veementemente o leitor a debruçar-se sobre o maior número possível deles por tempo suficiente para, ainda que não os resolva todos, passar a apreciá-los como corpo de conhecimento adquirido.

O primeiro volume discorre sobre vários aspectos relevantes do conjunto dos números reais e de álgebra elementar, no intuito de munir o leitor dos requisitos necessários ao estudo dos tópicos constantes dos volumes subsequentes. Após começar com uma discussão não axiomática das propriedades mais elementares dos números reais, são abordados, em seguida, produtos notáveis, equações e sistemas de equações, sequências elementares, indução matemática e números binomiais; o texto finda com a discussão de várias desigualdades algébricas importantes, notadamente aquela entre as médias aritmética e geométrica, bem como as desigualdades de Cauchy, de Chebyshev e de Abel.

Dedicamos o segundo volume a uma iniciação do leitor à geometria Euclidiana plana, inicialmente de forma não axiomática e enfatizando construções geométricas elementares. Entretanto, à medida em que o texto evolui, o método sintético de Euclides – e, consequentemente, demonstrações – ganha importância, principalmente com a discussão dos conceitos de congruência e semelhança de triângulos; a partir desse ponto, vários belos teoremas clássicos da geometria, usualmente ausen-

tes dos livros-texto do secundário, fazem sua aparição. Numa terceira etapa, o texto apresenta outros métodos elementares usuais no estudo da geometria, quais sejam, o método analítico de R. Descartes, a trigonometria e o uso de vetores; por sua vez, tais métodos são utilizados tanto para reobter resultados anteriores de outra(s) maneira(s) quanto para deduzir novos resultados.

De posse do traquejo algébrico construído no volume inicial e do aparato geométrico do volume dois, discorremos no volume três sobre aspectos elementares de funções e certos excertos de cálculo diferencial e integral e análise matemática, os quais se fazem necessários em certos pontos dos três volumes restantes. Prescindindo, inicialmente, das noções básicas do Cálculo, elaboramos, dentre outros, as noções de gráfico, monotonicidade e extremos de funções, bem como examinamos o problema da determinação de funções definidas implicitamente por relações algébricas. Na continuação, o conceito de função contínua é apresentado, primeiramente de forma intuitiva e, em seguida, axiomática, sendo demonstrados os principais resultados pertinentes. Em especial, utilizamos este conceito para estudar a convexidade de gráficos – culminando com a demonstração da desigualdade de J. Jensen – e o problema da definição rigorosa da área sob o gráfico de uma função contínua e positiva – que, por sua vez, possibilita a apresentação de uma construção adequada das funções logaritmo natural e exponencial. O volume três termina com uma discussão das propriedades mais elementares de derivadas e do teorema fundamental do cálculo, os quais são mais uma vez aplicados ao estudo de desigualdades, em especial da desigualdade entre as médias de potências.

O volume quatro é devotado à análise combinatória. Começamos revisando as técnicas mais elementares de contagem, enfatizando as construções de bijeções e argumentos recursivos como estratégias básicas. Na continuação, apresentamos um apanhado de métodos de contagem um tanto mais sofisticados, como o princípio da inclusão exclusão e os métodos de contagem dupla, do número de classes de

equivalência e mediante o emprego de métricas em conjuntos finitos. A cena é então ocupada por funções geradoras, onde a teoria elementar de séries de potências nos permite discutir de outra maneira problemas antigos e introduzir problemas novos, antes inacessíveis. Terminada nossa excursão pelo mundo da contagem, enveredamos pelo estudo do problema da existência de uma configuração especial no universo das configurações possíveis, utilizando para tanto o princípio das gavetas de G. L. Dirichlet – vulgo "princípio das casas dos pombos" –, um célebre teorema de R. Dilworth e a procura e análise de invariantes associados a problemas algorítmicos. A última estrutura combinatória que discutimos é a de um grafo, quando apresentamos os conceitos básicos usuais da teoria com vistas à discussão de três teoremas clássicos importantes: a caracterização da existência de caminhos Eulerianos, o teorema de A. Cayley sobre o número de árvores rotuladas e o teorema extremal de P. Turán sobre a existência de subgrafos completos em um grafo.

Passamos em seguida, no quinto volume, à discussão dos conceitos e resultados mais elementares de teoria dos números, ressaltando-se inicialmente a teoria básica do máximo divisor comum e o teorema fundamental da aritmética. Discutimos também o método da descida de P. de Fermat como ferramenta para provar a inexistência de soluções inteiras para certas equações diofantinas, e resolvemos também a famosa equação de J. Pell. Em seguida, preparamos o terreno para a discussão do famoso teorema de Euler sobre congruências, construindo a igualmente famosa função de Euler com o auxílio da teoria mais geral de funções aritméticas multiplicativas. A partir daí, o livro apresenta formalmente o conceito de congruência de números em relação a um certo módulo, discutindo extensivamente os resultados usualmente constantes dos cursos introdutórios sobre o assunto, incluindo raízes primitivas, resíduos quadráticos e o teorema de Fermat de caracterização dos inteiros que podem ser escritos como soma de dois quadrados. O grande diferencial aqui, do nosso ponto de vista, é o calibre dos

exemplos discutidos e dos problemas propostos ao longo do texto, boa parte dos quais oriundos de variadas competições ao redor do mundo.

Finalmente, números complexos e polinômios são os objetos de estudo do sexto e último volume da coleção. Para além da teoria correspondente usualmente estudada no secundário, vários são os tópicos não padrão abordados aqui. Dentre outros, destacamos inicialmente a utilização de números complexos e polinômios como ferramentas de contagem e a apresentação quase completa de uma das mais simples demonstrações do teorema fundamental da álgebra. A seguir, estudamos o famoso teorema de I. Newton sobre polinômios simétricos e as igualmente famosas desigualdades de Newton, as quais estendem a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. O próximo tema concerne os aspectos básicos da teoria de interpolação de polinômios, quando dispensamos especial atenção aos polinômios interpoladores de J. L. Lagrange. Estes, por sua vez, são utilizados para resolver sistemas lineares de Vandermonde sem o recurso à álgebra linear, os quais, a seu turno, possibilitam o estudo de uma classe particular de sequências recorrentes lineares. O livro termina com o estudo das propriedades de fatoração de polinômios com coeficientes inteiros, racionais ou pertencentes ao conjunto das classes de congruência relativas a algum módulo primo, seguido do estudo do conceito de número algébrico. Há, aqui, dois pontos culminantes: por um lado, uma prova mais simples do fechamento do conjunto dos números algébricos em relação às operações aritméticas básicas; por outro, o emprego de polinômios ciclotômicos para provar um caso particular do teorema de Dirichlet sobre primos em progressões aritméticas.

Várias pessoas contribuíram ao longo dos anos, direta ou indiretamente, para que um punhado de anotações em cadernos pudesse transformar-se nesta coleção de livros. Os ex-professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, Marcondes Cavalcante França, João Marques Pereira, Guilherme Lincoln Aguiar Ellery e Raimundo Thompson Gonçalves, ao criarem a Olimpíada Cea-

rense de Matemática na década de 1980, motivaram centenas de jovens cearenses, dentre os quais eu me encontrava, a estudarem mais Matemática. Meu ex-professor do Colégio Militar de Fortaleza, Antônio Valdenísio Bezerra, ao convidar-me, inicialmente para assistir a suas aulas de treinamento para a Olimpíada Cearense de Matemática e posteriormente para dar aulas consigo, iniciou-me no maravilhoso mundo das competições de Matemática e influenciou definitivamente minha escolha profissional. Os comentários de muitos de vários de ex-alunos contribuíram muito para o formato final de boa parte do material aqui colecionado; nesse sentido, agradeço especialmente a João Luiz de Alencar Araripe Falcão, Roney Rodger Sales de Castro, Marcelo Mendes de Oliveira, Marcondes Cavalcante França Jr., Marcelo Cruz de Souza, Eduardo Cabral Balreira, Breno de Alencar Araripe Falcão, Fabrício Siqueira Benevides, Rui Facundo Vigelis, Daniel Pinheiro Sobreira, Antônia Taline de Souza Mendonça, Carlos Augusto David Ribeiro, Samuel Barbosa Feitosa, Davi Máximo Alexandrino Nogueira e Yuri Gomes Lima. Vários de meus colegas professores teceram comentários pertinentes, os quais foram incorporados ao texto de uma ou outra maneira; agradeço, em especial, a Fláudio José Gonçalves, Francisco José da Silva Jr., Onofre Campos da Silva Farias, Emanuel Augusto de Souza Carneiro, Marcelo Mendes de Oliveira, Samuel Barbosa Feitosa e Francisco Bruno de Lima Holanda. Os professores João Lucas Barbosa e Hélio Barros deram-me a conclusão de parte destas notas como alvo a perseguir ao me convidarem a participar do Projeto Amílcar Cabral de treinamento dos professores de Matemática da República do Cabo Verde. Meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, Abdênago Alves de Barros, José Othon Dantas Lopes, José Robério Rogério e Fernanda Esther Camillo Camargo, bem como meu orientando de iniciação científica Itamar Sales de Oliveira Filho, leram partes do texto final e ofereceram várias sugestões. Os pareceristas indicados pela SBM opinaram decisivamente para que os livros certamente resultassem melhores que

a versão inicial por mim submetida. O presidente da SBM, professor Hilário Alencar da Silva, o antigo editor-chefe da SBM, professor Roberto Imbuzeiro de Oliveira, bem como o novo editor-chefe, professor Abramo Hefez, foram sempre extremamente solícitos e atenciosos comigo ao longo de todo o processo de edição. O sr. Tiago Rocha, assistente editorial da SBM, foi de fundamental importância em todo o processo, tendo contribuído em muito para a formato gráfico final da obra.

Por fim e principalmente, gostaria de agradecer a meus pais, Antonio Caminha Muniz Filho e Rosemary Carvalho Caminha Muniz, e à minha esposa Mônica Valesca Mota Caminha Muniz. Meus pais me fizeram compreender a importância do conhecimento desde a mais tenra idade, sem nunca terem medido esforços para que eu e meus irmãos desfrutássemos o melhor ensino disponível; minha esposa brindou-me com a harmonia e o incentivo necessários à manutenção de meu ânimo e humor, em longos meses de trabalho solitário nas madrugadas. Esta coleção de livros também é dedicada a eles.

FORTALEZA, JANEIRO de 2012

Antonio Caminha M. Neto

Prefácio à 2ª edição

Para a segunda edição fiz uma extensa revisão do texto e dos problemas propostos, corrigindo várias imprecisões de língua portuguesa e de Matemática. Adicionei também alguns problemas novos, no intuito de melhor exercitar certos pontos da teoria, os quais não se encontravam adequadamente contemplados pelos problemas propostos à primeira edição. Diferentemente da primeira edição, nesta segunda edição as sugestões e soluções aos problemas propostos foram colecionadas em um capítulo separado (o capítulo 8, para este volume); adicionalmente, apresentei sugestões ou soluções a praticamente todos os problemas do livro e, notadamente, a todos aqueles com algum grau apreciável de dificuldade.

Especificamente para este volume, o capítulo 4 traz uma nova seção (seção 4.3), a qual foi deslocada do volume 4, a fim de dar maior consistência ao tratamento de sequências elementares que, agora, aborda também sequências recorrentes lineares de segunda e terceira ordens.

Por fim, gostaria de aproveitar o ensejo para agradecer à comunidade matemática brasileira, em geral, e a todos os leitores que me

enviaram sugestões ou correções, em particular, o excelente acolhimento desfrutado pela primeira edição desta obra.

FORTALEZA, JANEIRO de 2013

Antonio Caminha M. Neto

CAPÍTULO 1

O Conjunto dos Números Reais

Este primeiro capítulo revisa e estabelece fatos essenciais a praticamente todos os desenvolvimentos posteriores. Assumimos do leitor uma relativa familiaridade com as definições e conceitos básicos sobre conjuntos; assumimos também conhecidos os conjuntos dos números **naturais**,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

dos números **inteiros**,

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\},$$

e **racionais**,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\},$$

bem como as operações aritméticas elementares em tais conjuntos.

Particularmente sobre números inteiros[1], para $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, dizemos que a *divide* b se existe um inteiro c tal que $b = ac$; nesse caso, denotamos $a \mid b$. Equivalentemente, dizer que a divide b é o mesmo que dizer que o racional $\frac{b}{a}$ é um inteiro. Por exemplo, 13 divide 52, uma vez que $\frac{52}{13} = 4$.

Se a divide b, dizemos ainda que a é um *divisor* de b, ou que b é *divisível* por a; nesse caso, denotamos $a \mid b$. Se a não divide b (ou, equivalentemente, se $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Z}$), denotamos $a \nmid b$. Um inteiro n é *par* se $2 \mid n$; caso contrário, o inteiro n é *ímpar*. Assim, $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$ são os inteiros pares, ao passo que $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ são os inteiros ímpares.

Dados naturais a e b, com $a \neq 0$, é bem sabido que existem *únicos* inteiros q e r satisfazendo as seguintes condições:

$$b = aq + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < a. \tag{1.1}$$

A relação acima é conhecida como o *algoritmo da divisão*, e os inteiros q e r são denominados, respectivamente, o *quociente* e o *resto* da divisão de b por a. As condições (1.1) são frequentemente resumidas no diagrama

$$\begin{array}{l|l} b & a \\ \hline r & q \end{array}$$

Em particular, para a e b naturais e nas notações acima, $a \mid b$ equivale a termos $r = 0$ e $q = \frac{b}{a}$.

Dois inteiros não nulos a e b sempre têm um maior divisor positivo comum, seu *máximo divisor comum* (denotado $\text{mdc}\,(a, b)$); a e b são *primos entre si* quando $\text{mdc}\,(a, b) = 1$. Se um racional não nulo r admite a representação fracionária $r = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros, então, *simplificando os fatores comuns a m e n* (i.e., cancelando o fator $\text{mdc}\,(m, n)$ em m e em n), obtemos uma representação fracionária

[1]Remetemos o leitor ao capítulo 1 do volume 5 para uma discussão sistemática do que segue.

irredutível para r. Por exemplo, o racional $\frac{-12}{18}$ tem a representação fracionária irredutível $\frac{-2}{3}$, obtida cancelando o fator $6 = \text{mdc}\,(-12, 18)$ do numerador e do denominador.

Um inteiro $p > 1$ é *primo* se seus únicos divisores positivos forem 1 e p; de outro modo, um inteiro $p > 1$ é primo se, para $a \in \mathbb{N}$, tivermos que

$$\frac{p}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 1 \text{ ou } p.$$

É um fato bem conhecido (cf. teorema 1.36 do volume 5) que o conjunto dos números primos é infinito, sendo seus elementos menores que 100 os números

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53,$$

$$59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Um inteiro maior que 1 e que não é primo é dito *composto*.

Também é bastante conhecido (cf. teorema 1.41 do volume 5) que todo natural $n > 1$ pode ser escrito como produto de um número finito de potências[2] de primos (seus *fatores primos*), e que tal maneira de escrevê-lo é única, a menos de uma reordenação de tais potências. Por exemplo, $9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ é a decomposição do inteiro 9000 em fatores primos. Essa propriedade é conhecida como o *teorema Fundamental da Aritmética*.

1.1 Aritmética em $\mathbb{R}$

Costumamos representar números racionais em *notação decimal*. Para o racional $\frac{1}{8}$, por exemplo, escrevemos $\frac{1}{8} = 0{,}125$ como uma abreviação para a igualdade

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3},$$

[2]Para relembrar a definição e as principais propriedades de potências de um número, veja a discussão da seção 1.2.

e dizemos que 0,125 é a **representação decimal** de $\frac{1}{8}$.

Racionais há, entretanto, com representações decimais mais complicadas. Tomemos como exemplo o racional $\frac{1}{12}$, para o qual usualmente escrevemos

$$\frac{1}{12} = 0{,}08333\ldots.$$

O que significa a igualdade acima? Imitando o caso do racional $\frac{1}{8}$, somos tentados a dizer que a igualdade acima é uma abreviação para

$$\frac{1}{12} = \frac{8}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots. \tag{1.2}$$

Esse é, de fato, o caso, contanto que interpretemos corretamente a soma com um número infinito de parcelas do segundo membro. Rigorosamente falando, a igualdade (1.2) significa que, fixado *a priori* um erro máximo $\frac{1}{10^n} = 0,\underbrace{00\ldots01}_{n}$, temos

$$0 < \frac{1}{12} - \left(\frac{8}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots + \frac{3}{10^k}\right) \leq \frac{1}{10^n}$$

para todo natural $k \geq n$; de outro modo, a igualdade (1.2) significa que todos os números $\frac{8}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots + \frac{3}{10^k}$, com $k \geq n$, são **aproximações por falta** de $\frac{1}{12}$ com erro menor ou igual que $0,\underbrace{00\ldots01}_{n}$.

De fato, seguirá da proposição 4.12 que

$$\frac{1}{12} - \left(\frac{8}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots + \frac{3}{10^k}\right) = \frac{1}{3 \cdot 10^k},$$

e, portanto, o erro na aproximação por falta acima de $\frac{1}{12}$ será $\frac{1}{3 \cdot 10^k}$, o qual é menor ou igual que o erro máximo $\frac{1}{10^n}$, sempre que $k \geq n$. É nesse sentido que devemos pensar na igualdade $\frac{1}{12} = 0{,}08333\ldots$.

De posse da discussão acima, uma pergunta que se coloca naturalmente é a seguinte: dada uma *sequência*[3] qualquer $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de

[3]Conforme veremos na seção 1.1 do volume 3, uma sequência de números reais é

algarismos, podemos pensar em

$$0{,}a_1a_2a_3\ldots$$

como a representação decimal de algum número racional, nos moldes da discussão acima?

É possível provar (e o faremos no problema 2, página 10) que a resposta a tal pergunta será *sim* se, e só se, a lista $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ for, a partir de um certo ponto, *periódica*, i.e., da forma

$$(a_1, a_2, \ldots, a_l, \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_p}_{p}, \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_p}_{p}, \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_p}_{p}, \ldots). \tag{1.3}$$

(Em particular, para o racional $\frac{1}{12}$ a lista em questão é $(0, 8, 3, 3, 3, \ldots)$, a qual é, claramente, periódica.) Portanto, se formos capazes de exibir uma lista de algarismos que não seja periódica a partir de ponto algum, concluiremos que a resposta geral à pergunta do parágrafo anterior é *não*! Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.1. A lista de algarismos $(0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, \ldots)$, na qual há infinitos algarismos 0 e a quantidade de algarismos 1 após cada algarismo 0 é sempre igual à quantidade anterior de algarismos 1 mais um, não é periódica a partir de nenhum ponto.

Prova. Suponha, por contradição, que tal lista fosse periódica a partir de um certo ponto e que, a partir de tal ponto, os algarismos se repetissem a cada p algarismos, digamos. A regra de formação da lista garante que haverá uma posição a partir da qual toda ocorrência de um bloco de algarismos 1 sempre se dará com mais de p algarismos 1 consecutivos. Portanto, o bloco de algarismos que se repetem deveria

uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; entretanto, para nossos propósitos aqui, podemos pensá-la como uma *lista ordenada* de números reais, i.e., uma lista de números reais na qual especificamos quem é o primeiro número da lista, quem é o segundo, o terceiro, etc. Discutiremos sistematicamente algumas sequências elementares no capítulo 4.

ser formado somente por algarismos 1, i.e., a lista deveria ser, a partir de certa posição, da forma $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$. Mas, se tal ocorresse, então, a partir dessa posição, não mais poderíamos ter algarismos 0, o que é uma contradição! ■

Informalmente, podemos resumir a discussão acima evidenciando a seguinte deficiência do conjunto dos racionais: todo racional admite uma representação decimal, mas nem toda *representação decimal* representa algum racional. Nesse ponto, a fim de suprir tal deficiência, **postulamos**[4] a existência de um conjunto, o qual denotaremos $\mathbb{R}$, contendo $\mathbb{Q}$ e possuindo as seguintes propriedades:

(I) As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão em $\mathbb{Q}$ se estendem aos elementos de $\mathbb{R}$, gozando em $\mathbb{R}$ das mesmas propriedades que gozam em $\mathbb{Q}$.

(II) A ordenação dos elementos de $\mathbb{Q}$ se estende aos elementos de $\mathbb{R}$, também gozando, em $\mathbb{R}$, das mesmas propriedades que goza em $\mathbb{Q}$; em particular, todo elemento de $\mathbb{R}$ é *negativo*, *igual a zero* ou *positivo*.

(III) A toda lista $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de algarismos corresponde um único elemento $x \in \mathbb{R}$, no sentido da discussão do início deste capítulo, o qual será denotado $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$. Reciprocamente, a todo $x \in \mathbb{R}$ correspondem um único inteiro m e uma única lista $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de algarismos, tais que $x = m + 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, onde $+$ representa a operação de adição em $\mathbb{R}$.

[4]Um **axioma** ou **postulado** em uma certa teoria é uma propriedade imposta como verdadeira. Uma das características fundamentais da Matemática como ramo do conhecimento humano é a utilização do **método axiomático**, i.e., a aceitação do fato de que nem toda propriedade matemática pode ser deduzida a partir de propriedades matemáticas previamente estabelecidas, sendo necessária a adoção *a priori* de um conjunto de axiomas. De outro modo, há um ponto em que precisamos admitir que certas propriedades (os axiomas) sejam válidas *per si*, i.e., sem justificativa embasada na validade de outras propriedades.

Os elementos de $\mathbb{R}$ são denominados **números reais** e o conjunto $\mathbb{R}$ como um todo é o **conjunto dos números reais**[5].

No que segue, detalhamos o que cada um dos itens (I), (II) e (III) acima realmente significa.

Postulamos que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é munido com duas operações, denotadas $+$ e $\cdot$ e respectivamente denominadas (por analogia com as operações correspondentes em $\mathbb{Q}$) *adição* e *multiplicação*, as quais satisfazem os axiomas (1) a (7) a seguir:

(1) *Consistência*: para $a, b \in \mathbb{Q}$, o resultado $a + b$ da adição de a e b é o mesmo, quer consideremos a adição usual de $\mathbb{Q}$ ou a operação correspondente em $\mathbb{R}$. Analogamente, o resultado $a \cdot b$ da multiplicação de a e b é o mesmo, quer consideremos a multiplicação usual de $\mathbb{Q}$ ou a operação correspondente em $\mathbb{R}$.

(2) *Comutatividade*: as operações $+$ e $\cdot$ são comutativas, i.e., são tais que $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(3) *Associatividade*: as operações $+$ e $\cdot$ são associativas, i.e., são tais que $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(4) *Distributividade*: a operação de multiplicação é distributiva em relação à de adição, i.e., é tal que $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(5) *Existência de elementos neutros únicos*: os números racionais 0 e 1 são elementos neutros, respectivamente, para as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, i.e., tem-se $0 + a = a$ e $1 \cdot a = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

[5]Há maneiras de certa forma mais *construtivas* de se introduzir o conjunto dos números reais (veja, por exemplo, [34], ou, para uma abordagem mais profunda, [12]). Nestas notas, optamos por uma abordagem que fosse a mais próxima possível da experiência prévia do leitor médio.

(6) *Lei do cancelamento*: se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

(7) *Existência de inversos aditivo e multiplicativo*: se $a \in \mathbb{R}$, então existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a + b = 0$. Se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, então existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot b = 1$.

Como decorrência das propriedades acima, temos as seguintes consequências importantes:

(i) Unicidade do inverso aditivo: para $a \in \mathbb{R}$, se $b, b' \in \mathbb{R}$ são tais que $a+b = 0$ e $a+b' = 0$, então a associatividade e a comutatividade da adição, juntamente com o fato de 0 ser elemento neutro para tal operação, nos dão

$$\begin{aligned} b &= b + 0 = b + (a + b') \\ &= (b + a) + b' = (a + b) + b' \\ &= 0 + b' = b'. \end{aligned}$$

Portanto, o real a possui um único inverso aditivo, o qual será, doravante, denotado por $-a$, como feito usualmente para os racionais. Segue de $a + (-a) = 0$ que a é o inverso aditivo de $-a$; portanto, de acordo com a notação estabelecida acima para inversos aditivos, temos $-(-a) = a$.

(ii) Unicidade do inverso multiplicativo: para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se $b, b' \in \mathbb{R}$ são tais que $a \cdot b = 1$ e $a \cdot b' = 1$, então $b = b'$. A prova deste fato é totalmente análoga à do item anterior (cf. problema 3, página 10). Doravante, denotaremos o inverso multiplicativo de $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, por a^{-1}, como é usual para os racionais.

(iii) Para $a \in \mathbb{R}$, tem-se $a \cdot 0 = 0$: a fim de verificar essa igualdade, denote $a \cdot 0 = e$. Pela distributividade da multiplicação em relação à adição, temos

$$e = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = e + e.$$

Por outro lado, usando o fato de que 0 é elemento neutro da adição e que tal operação é associativa, obtemos

$$\begin{aligned} e &= e + 0 = e + (e + (-e)) \\ &= (e + e) + (-e) \\ &= e + (-e) = 0, \end{aligned}$$

i.e., $a \cdot 0 = e = 0$.

De posse das propriedades acima para as operações de adição e multiplicação de números reais, convencionamos (como é praxe em $\mathbb{Q}$) omitir o sinal $\cdot$ da multiplicação, escrevendo simplesmente ab para denotar $a \cdot b$. Observe, agora, que a associatividade e a comutatividade da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$ nos permitem adicionar ou multiplicar uma quantidade finita qualquer de números reais, sem nos preocuparmos com quais parcelas ou fatores devemos operar inicialmente; o resultado final será sempre o mesmo[6].

Também, *definimos* as operações de subtração $(-)$ e divisão $(\div)$ em $\mathbb{R}$ assim como em $\mathbb{Q}$: para $a, b \in \mathbb{R}$, pomos

$$a - b = a + (-b) \quad \text{e} \quad a \div b = ab^{-1},$$

com $b \neq 0$ neste último caso; ainda nesse caso, sempre que não houver perigo de confusão com a representação fracionária do racional $\frac{a}{b}$ escrevemos a/b ou $\frac{a}{b}$ como sinônimos de $a \div b$.

Problemas – Seção 1.1

[6]Rigorosamente falando, a validade dessa afirmação deveria ser demonstrada como um teorema, o que pode ser feito com o auxílio do princípio de indução finita (cf. capítulo 5). Todavia, a fim de tornar a leitura menos densa, optamos por nos apoiar na experiência prévia do leitor médio, assumindo tal propriedade sem uma demonstração formal.

1. * Estabeleça as seguintes *propriedades de proporções*: se a, b, c e d são inteiros não nulos, tais que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}.$$

2. * Dada uma sequência qualquer $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de algarismos, prove que o número real $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ representa a expansão decimal de um racional se, e só se, a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ for periódica, no sentido de (1.3).

3. * Prove a unicidade do inverso multiplicativo em $\mathbb{R}$. Mais precisamente, prove que se $a \neq 0$ é um número real e $b, b' \in \mathbb{R}$ são tais que $a \cdot b = a \cdot b' = 1$, então $b = b'$.

4. Prove, a partir dos axiomas para adição e multiplicação de números reais, que $-a = (-1)a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

5. Em cada um dos itens a seguir, decida se o número em questão é racional, assumindo que o padrão sugerido até o aparecimento das reticências seja seguido a partir de então. Ademais, caso o número seja racional, escreva-o como fração irredutível:

   (a) 2,324444....

   (b) 0,12121212....

   (c) 2,1345454545....

   (d) 0,1234567891011121314....

1.2 A relação de ordem em $\mathbb{R}$

Em $\mathbb{R}$, postulamos também a existência de uma **relação de ordem** (i.e., uma *maneira de comparar elementos* de $\mathbb{R}$), denotada, por analogia com a relação correspondente em $\mathbb{Q}$, $\geq$ (lê-se *maior ou igual que*) e satisfazendo os axiomas (1') a (5') a seguir:

(1') *Consistência*: se $a, b \in \mathbb{Q}$ e $a \geq b$ em $\mathbb{Q}$, então $a \geq b$ em $\mathbb{R}$.

(2') *Reflexividade*: $a \geq a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

(3') *Antissimetria*: se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$.

(4') *Transitividade*: se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$.

(5') *Dicotomia*: para todos $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $a \geq b$ ou $b \geq a$.

No que segue, se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a \geq b$ e $a \neq b$, denotamos $a > b$ (lê-se *a maior que b*). Escrevemos ainda $a \leq b$ (lê-se *a menor ou igual que b*) como sinônimo de $b \geq a$, e $a < b$ (lê-se *a menor que b*) como sinônimo de $b > a$. Para $a \in \mathbb{R}$, se $a > 0$ dizemos que a é **positivo**; se $a < 0$, dizemos que a é **negativo**.

Impomos, ainda, à relação de ordem $\geq$ em $\mathbb{R}$, os axiomas (6') e (7') a seguir, os quais garantem – assim como em $\mathbb{Q}$ – sua *compatibilidade* com as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$:

(6') $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

(7') $a, b > 0 \Rightarrow a + b, ab > 0$.

A proposição a seguir coleciona mais algumas propriedades úteis da relação de ordem em $\mathbb{R}$, as quais podem ser deduzidas a partir dos axiomas (1') a (7') acima. Para o enunciado da mesma diremos, doravante, que dois números reais não nulos *têm um mesmo sinal* se forem ambos positivos ou ambos negativos.

Proposição 1.2. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(*a*) Se $a > 0$, então $-a < 0$, e vice-versa.

(*b*) Se $a > 0$, então $\begin{cases} b > 0 \Rightarrow ab > 0 \\ b < 0 \Rightarrow ab < 0 \end{cases}$.

(*c*) Se $a < 0$, então $\begin{cases} b > 0 & \Rightarrow & ab < 0 \\ b < 0 & \Rightarrow & ab > 0 \end{cases}$.

(*d*) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

(*e*) $a > b, c \geq d \Rightarrow a + c > b + d$.

(*f*) Se $a > b$, então $\begin{cases} c > 0 & \Rightarrow & ac > bc \\ c < 0 & \Rightarrow & ac < bc \end{cases}$.

(*g*) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$.

(*h*) $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$.

(*i*) Se a e b têm um mesmo sinal e $a > b$, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Prova. Provemos somente alguns dos itens acima; os demais ficam como exercícios (veja o problema 1, página 15).

(a) Segue do axioma (6') acima:

$$0 > -a \Leftrightarrow 0 - (-a) > 0 \Leftrightarrow a > 0.$$

(d) Novamente pelo axioma (6'), temos que

$$a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow (a + c) - (b + c) > 0 \Rightarrow a + c > b + c.$$

(e) Usemos (d) e a transitividade de $\geq$:

$$\left.\begin{array}{lcl} a > b & \Rightarrow & a + c > b + c \\ c \geq d & \Rightarrow & b + c \geq b + d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c > b + d.$$

(f) Suponha $c > 0$ (o caso $c < 0$ é análogo). Segue de (6') e (7') que

$$a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow (a - b)c > 0 \Rightarrow ac - bc > 0 \Rightarrow ac > bc.$$

(h) Suponha $a > 0$. Se fosse $\frac{1}{a} < 0$, teríamos, pelo item (b), que $1 = a \cdot \frac{1}{a} < 0$, o que é um absurdo (uma vez que a relação de ordem

em $\mathbb{R}$ estende a relação correspondente em $\mathbb{Q}$).

(i) Como a e b têm um mesmo sinal, segue de (b) e (c) que $ab > 0$. Assim, $\frac{1}{ab} > 0$ pelo item (*h*) e, de $b - a < 0$, segue de (b) ou (c) que

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} = (b - a) \cdot \frac{1}{ab} < 0.$$

Por sua vez, (6') garante que a relação acima equivale a $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ■

Os itens (b) e (c) da proposição anterior são coletivamente conhecidos como as **regras de sinal** para a multiplicação de números reais.

Para o que segue, dado $r \in \mathbb{R}$, definimos o **quadrado** de r, denotado r^2 (lê-se também *r ao quadrado*), como o número real $r^2 = r \cdot r$, e o **cubo** de r, denotado r^3 (lê-se também *r ao cubo*), como o número real $r^3 = r \cdot r \cdot r$. Mais geralmente, para um dado $n \in \mathbb{N}$, definimos a **nª** (lê-se *n−ésima*) **potência** de r, denotada r^n, como sendo r, caso $n = 1$, ou o número real obtido multiplicando-se r por ele mesmo n vezes, caso $n > 1$:

$$r^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}_{n}.$$

Aqui, cumpre chamar a atenção do leitor para o fato de que a associatividade da multiplicação de números reais, juntamente com o princípio de indução finita (cf. capítulo 5) permite provar que o resultado do segundo membro da igualdade acima independe da ordem em que efetuemos as multiplicações, de sorte que o número r^n é bem definido. Os números reais r, r^2, r^3, ... são conhecidos coletivamente como as *potências* de expoentes naturais do número real r. O problema 14, página 16, lista algumas propriedades operatórias úteis de tais números reais.

Uma consequência importante das propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$ elencadas na proposição anterior é aquela constante do corolário a seguir.

Corolário 1.3. Sejam r um real positivo e m e n naturais, com $m > n$. Então:

(a) $0 < r < 1 \Rightarrow r^m < r^n$.

(b) $r > 1 \Rightarrow r^m > r^n$.

Prova.
(a) Como r é positivo, multiplicando por r ambos os membros da desigualdade $r < 1$, obtemos $r^2 < r$. Multiplicando ambos os membros dessa última desigualdade novamente por r, segue que $r^3 < r^2$ e, daí, $r^3 < r^2 < r$. Prosseguindo dessa maneira, chegamos ao resultado desejado, i.e.,

$$\cdots < r^4 < r^3 < r^2 < r.$$

(b) A demonstração é essencialmente a mesma que aquela do item (a), com a diferença de que, inicialmente, temos $r > 1$. ■

Mostremos, no exemplo a seguir, como comparar certos números reais com o auxílio do corolário anterior.

Exemplo 1.4. A fim de comparar os números $2^{100} + 3^{100}$ e 4^{100}, por exemplo, basta ver que

$$\begin{aligned} 2^{100} + 3^{100} &< 3^{100} + 3^{100} = 2 \cdot 3^{100} \\ &= 2 \cdot 3^3 \cdot 3^{97} = 54 \cdot 3^{97} \\ &< 64 \cdot 4^{97} = 4^3 \cdot 4^{97} = 4^{100}. \end{aligned}$$

Relações de desigualdade entre números reais serão estudadas em detalhe no capítulo 7; nessa ocasião, o corolário a seguir – em que pese sua simplicidade – desempenhará um papel de grande importância.

Corolário 1.5. Para $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se

$$a^2 + b^2 \geq 0, \qquad (1.4)$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a = b = 0$.

Prova. Pelo item (g) da proposição 1.2, temos $a^2, b^2 \geq 0$. Portanto, segue do item (d) daquela proposição que $a^2 + b^2 \geq 0$. Suponha, agora, que $a \neq 0$. Novamente pelo item (g) da proposição referida, temos $a^2 > 0$. Por outro lado, como $b^2 \geq 0$ ainda é verdade, o item (e) da proposição garante que $a^2 + b^2 > 0$. ■

Problemas – Seção 1.2

1. * Prove os itens (b), (c) e (g) da proposição 1.2.

2. Prove que $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}$.

3. Para a e b reais positivos tais que $a < b$, compare (i.e., decida qual é o maior dentre) os números $\frac{a+1}{b+1}$ e $\frac{a+2}{b+2}$.

4. (Torneio das Cidades.) São dados dez números reais tais que a soma de quaisquer quatro deles é positiva. Mostre que a soma dos dez números é positiva.

5. Decida qual dentre os números 31^{11} e 17^{14} é o maior.

6. * Sejam dados $n \in \mathbb{N}$ e a, b reais positivos quaisquer. Prove que:

   (a) $a < b$ se, e só se, $a^2 < b^2$.

   (b) $a < b$ se, e só se, $a^n < b^n$.

   (c) $a^n + b^n < (a + b)^n$.

7. (Hungria - adaptado.) Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, sendo $c > a, b$. Quem é maior: $a^3 + b^3$ ou c^3? Justifique sua resposta.

8. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} \geq 2 \cdot 7^n$.

9. * Encontre todos os naturais a, b e c tais que $a \leq b \leq c$ e $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ seja inteiro.

10. (IMO.) Explique como escrever o número 100 como soma de parcelas naturais cujo produto seja o maior possível.

11. (Rússia.) Os números 2^n e 5^n têm representações decimais começando, à esquerda, por um mesmo algarismo. Prove que tal algarismo deve ser igual a 3.

12. (Rússia.) Sejam a, b, c e d reais positivos dados. Prove que, dentre as desigualdades

$$a+b < c+d, \quad (a+b)(c+d) < ab+cd \quad \text{e} \quad (a+b)cd < ab(c+d),$$

ao menos uma é falsa.

13. * Generalize o corolário 1.5, mostrando que, se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então

$$a^2+b^2+c^2 \geq 0,$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a=b=c=0$.

14. * Dados $r, s \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, prove que[7]:

(a) $(rs)^n = r^n s^n$.

(b) $r^{m+n} = r^m r^n$.

(c) $(r^m)^n = r^{mn}$.

(d) $\left(\frac{r}{s}\right)^n = \frac{r^n}{s^n}$, se $s \neq 0$.

[7]Rigorosamente, para provar as propriedades dos itens (a) a (d) temos de recorrer ao princípio de indução finita (cf. capítulo 5). Todavia, nossa intenção aqui é simplesmente que o leitor, utilizando argumentos heurísticos como os apontados na sugestão ao problema, se convença da validade de tais propriedades.

15. * Para r real não nulo e n natural, estendemos a noção de potências de expoentes naturais definindo $r^{-n} = \frac{1}{r^n}$. Por exemplo, $r^{-1} = \frac{1}{r}$, $r^{-2} = \frac{1}{r^2}$, etc. Definindo também $r^0 = 1$, prove que, para todos $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se $\frac{r^m}{r^n} = r^{m-n}$.

16. Se a e b são inteiros tais que os únicos fatores primos de b são 2 ou 5, prove que a expansão decimal de $\frac{a}{b}$ é finita.

17. * Se $x \neq 0$ é um número real e $n \in \mathbb{N}$, prove que x^n é positivo se n for par, e x^n tem o mesmo sinal de x se n for ímpar.

1.3 A completude do conjunto dos reais

Postulamos, por fim, que a toda lista $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de algarismos corresponda um único elemento $x \in \mathbb{R}$, no seguinte sentido: fixado um erro máximo $\frac{1}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$0 \leq x - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}\right) \leq \frac{1}{10^n},$$

para todo natural $k \geq n$. Em particular, segue da condição acima que

$$x \leq \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n},$$

para todo $k \geq n$. Tomando $k = n$ e lembrando que $a_j \leq 9$ para todo j, obtemos

$$\begin{aligned} x &\leq \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \\ &\leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^{n-1}} + \frac{9}{10^n} + \frac{1}{10^n} \\ &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^{n-1}} \\ &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-2}} \\ &= \cdots = 1, \end{aligned}$$

de sorte que $0 \leq x \leq 1$.

Resumimos o postulado acima dizendo que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é **completo**. A esse respeito, veja também a discussão da seção 1.5 e o problema 6 da seção 3.2 do volume 3.

Reciprocamente, postulamos também que a todo número real positivo x corresponda um inteiro (não negativo) m e uma lista $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de algarismos, tal que $x = m + 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ no sentido acima. Se $m > 0$ e $m = b_n \ldots b_1b_0$, com os b_i's sendo seus algarismos, escrevemos

$$x = b_n \ldots b_1b_0, a_1a_2a_3 \ldots$$

e dizemos que $b_n \ldots b_1b_0{,}a_1a_2a_3\ldots$ é a **representação decimal** de x.

Conforme vimos no problema 2 da página 10, um número real é racional exatamente quando sua representação decimal for finita ou infinita e periódica. Por outro lado, números reais que não são racionais são denominados **irracionais**. Desse modo, os números irracionais são aqueles números reais que não podem ser escritos como quocientes de dois números inteiros ou, ainda, aqueles cuja representação decimal é **infinita e aperiódica**.

Até o presente momento, o único exemplo de número irracional que conhecemos é o número $0{,}0101101110\ldots$ (cf. exemplo 1.1). De certa forma, tal exemplo é um tanto frustrante, uma vez que tal número irracional é difícil de ser manipulado (i.e., é difícil *fazer contas* com ele). Remediamos um pouco esta situação no que segue.

Do ponto de vista aritmético, uma grande vantagem do conjunto dos números reais, em comparação com o conjunto dos racionais, é a possibilidade de *extrairmos raízes* de números reais positivos. Mais precisamente, dados $x > 0$ real e $n \in \mathbb{N}$, é possível provar que existe um único real positivo y tal que $y^n = x$. Tal real positivo y será, doravante, denotado $y = \sqrt[n]{x}$ e denominado a **raiz n−ésima** (lê-se *enésima*) de x ou, ainda, a raiz de **índice** n de x. Assim,

$$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n.$$

Os casos $n = 2$ e $n = 3$ ocorrem com tanta frequência que merecem nomes especiais. Quando $n = 2$ (e $x > 0$), escrevemos simplesmente $\sqrt{x}$, em vez de $\sqrt[2]{x}$, e dizemos que $\sqrt{x}$ é a **raiz quadrada** de x; quando $n = 3$, dizemos que $\sqrt[3]{x}$ é a **raiz cúbica** de x.

Intuitivamente, podemos entender porque existem raízes de números reais positivos examinando um exemplo simples. Por definição, temos $\sqrt{2}^2 = 2$. Assim, como $1^2 < 2 < 2^2$, segue do problema 6, página 15, que $1 < \sqrt{2} < 2$; como $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$, segue novamente do referido problema que $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; analogamente, como $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$, temos que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ e, prosseguindo dessa maneira, obtemos uma única lista $(4, 1, 4, \ldots)$ de algarismos, tal que $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ (veja também o problema 20, página 138).

Denominamos **radiciação** à operação de obtenção de raízes de um real positivo. Sugerimos ao leitor, neste momento, pelo menos ler os enunciados dos problemas 1 e 2 da página 21, para uma extensão parcial da operação de radiciação a reais negativos, assim como para as principais propriedades de tal operação.

Voltemo-nos, agora, a potências de números naturais. Um **quadrado perfeito** é um número natural que pode ser escrito na forma m^2, para algum $m \in \mathbb{N}$; assim, os quadrados perfeitos são os números $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, etc. Um **cubo perfeito** é um natural que pode ser escrito na forma m^3, para algum $m \in \mathbb{N}$; os cubos perfeitos são os números $1^3 = 1$, $2^3 = 4$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, etc. Mais geralmente, um natural n é uma **potência perfeita** se existirem $k > 1$ inteiro e $m \in \mathbb{N}$ tais que $n = m^k$. Nesse caso, dizemos que n é uma **k−ésima potência perfeita**, i.e., um dos naturais 1^k, 2^k, 3^k, 4^k, etc. Equivalentemente, dizer que $n \in \mathbb{N}$ é uma k−ésima potência perfeita é o mesmo que dizer que sua raiz k−ésima, $\sqrt[k]{n}$, é um número natural.

O resultado a seguir, que assumiremos por ora sem demonstração, fornece inúmeros exemplos de números irracionais. Para uma prova do mesmo, referimos o leitor ao exemplo 1.23 do volume 5.

Proposição 1.6. Dados números naturais n e k, com $k > 1$, ou n é uma k–ésima potência perfeita ou $\sqrt[k]{n}$ é um número irracional.

De acordo com a proposição acima, números como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{10}$, etc são todos irracionais (posto que 2 não é um quadrado perfeito, 3 não é um cubo perfeito e 10 não é uma quinta potência perfeita).

Podemos agora, pelo menos *formalmente* (i.e., sem nos preocuparmos com *valores aproximados*), operar com vários números irracionais. Vejamos um exemplo nesse sentido, onde nos valemos – de maneira indireta – da proposição acima para explicar o porquê de um certo número real ser irracional.

Exemplo 1.7. O número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional. De fato, denotando $r = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, há duas possibilidades: $r \in \mathbb{Q}$ ou $r \notin \mathbb{Q}$. Suponha, por contradição, que r fosse racional. Então, uma vez que o conjunto dos números racionais é fechado para a operação de multiplicação, teríamos $r^2 \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, a distributividade da multiplicação em relação à adição nos dá

$$\begin{aligned} r^2 &= (\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\ &= (2+\sqrt{6})+(\sqrt{6}+3) \\ &= 5+2\sqrt{6} \end{aligned}$$

e, daí, $\sqrt{6} = \frac{r^2-5}{2}$. Portanto, $\sqrt{6}$ seria o quociente dos números racionais r^2-5 e 2, de maneira que $\sqrt{6}$ seria ele mesmo um racional, o que é um absurdo pela proposição 1.6. Logo, a única possibilidade é $r \notin \mathbb{Q}$.

Para terminar nossa discussão sobre números racionais e irracionais, note que o conjunto dos números irracionais não é *fechado* em relação às operações aritméticas. De fato, dado r irracional, temos que $-r$ também é irracional, muito embora $r+(-r) = 0$, um número

racional. Por outro lado, fazendo $r = \sqrt{2}$ temos $r \cdot r = r^2 = 2$, também racional. Finalmente, se $r \neq 0$, então o quociente de r por si mesmo é igual a 1, novamente um número racional.

Problemas – Seção 1.3

1. * Dados $x < 0$ real e $n \in \mathbb{N}$ ímpar, seja $y = -\sqrt[n]{-x}$. Prove que $y^n = x$ (o real y é também denominado a **raiz n–ésima** de x).

2. * Dados $m, n \in \mathbb{N}$ e $x, y > 0$, prove que:

   (a) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.

   (b) $\sqrt[mn]{x} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$.

   (c) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

   Estenda as propriedades acima a todos os x, y reais não nulos, caso m e n sejam naturais ímpares.

3. * Sejam a e b números racionais e r um número irracional. Se $a + br = 0$, prove que $a = b = 0$.

4. Sejam a, b, c e d números racionais e r um número irracional. Se $a + br = c + dr$, prove que $a = c$ e $b = d$.

5. Seja r um real positivo e k um inteiro maior que 1. Se r for irracional, prove que os números $\frac{1}{r}$ e $\sqrt[k]{r}$ também são irracionais.

6. (Canadá.) Sejam a, b e c números racionais, tais que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$. Prove que a, b e c são todos nulos.

7. * Assumindo a validade do teorema fundamental da aritmética (cf. último parágrafo da página 3), prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

8. Seja, $p \in \mathbb{N}$ um número primo e $k > 1$ um natural. Prove que o número $\sqrt[k]{p}$ é irracional.

1.4 A representação geométrica

Uma maneira bastante útil de *pensar geometricamente* no conjunto dos números racionais é a seguinte: escolhemos uma reta r e marcamos sobre ela um ponto O; em seguida, escolhemos uma das semirretas que O determina sobre r, a qual chamamos **positiva**, sendo a outra a semirreta **negativa**, e um segmento ℓ como padrão de comprimento. Agora, associamos cada número racional a um ponto de r do seguinte modo: primeiro, associamos 0 ao ponto O; em seguida (cf. figura 1.1), dado um racional $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$, marcamos, a partir de O e sobre a semirreta positiva, um segmento OA de comprimento $a\ell$ (i.e., OA é obtido justapondo-se, consecutivamente, a segmentos-padrão). Se $b = 1$, associamos $\frac{a}{1} = a$ ao ponto A. Se $b > 1$, particionamos OA em b segmentos iguais, marcando $b - 1$ pontos sobre OA; sendo B o ponto da partição mais próximo de O, associamos $\frac{a}{b}$ ao ponto B. Não é difícil mostrar que a construção descrita acima é consistente, no sentido de que, trocando $\frac{a}{b}$ por outra fração equivalente, obtemos um mesmo ponto B sobre r (a esse respeito, veja o problema 1, página 26). Uma construção análoga pode ser feita para os racionais negativos,
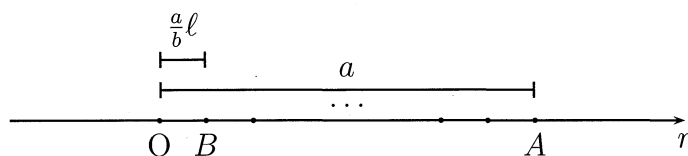
Figura 1.1: racionais sobre a reta.

marcados sobre a semirreta negativa.

Ocorre que, ao assim fazermos, *sobram* muitos pontos sobre r, os quais não estão associados a nenhum número racional. Para exemplificar, considere o ponto A associado ao número 1 e construa um quadrado $OABC$, como na figura 1.2. Em seguida, marque, com um
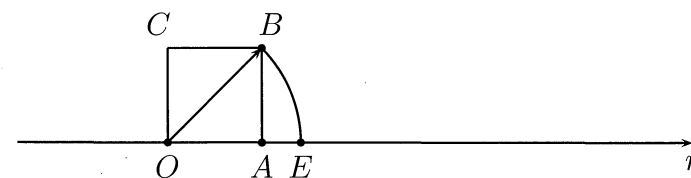
Figura 1.2: um ponto que não representa racional algum.

compasso, um ponto E sobre a semirreta positiva, tal que $\overline{OE} = \overline{OB}$. Como $\overline{OA} = 1$, segue do teorema de Pitágoras[8] que $\overline{OE} = \overline{OB} = \sqrt{2}$. Mas, como $\sqrt{2}$ é irracional (cf. proposição 1.6 ou problema 7, página 21), segue que E não está associado a nenhum número racional.

Duas perguntas naturais colocam-se neste ponto: é possível marcar sobre r todos os números reais? Supondo que a resposta à pergunta anterior seja sim, após marcarmos todos os pontos de $\mathbb{R}$ sobre r ainda sobram em r pontos não marcados? Um dos axiomas da construção da Geometria Euclidiana plana[9], enunciado a seguir, garante que as respostas a tais perguntas são respectivamente *sim* e *não*.

Axioma 1.8. Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta r e o conjunto dos números reais, a qual fica totalmente determinada pelas seguintes escolhas:

(*a*) Um ponto O sobre r para representar o número real 0.

(*b*) Uma semirreta, dentre as que O determina sobre r, onde são marcados os reais positivos.

[8] Recordamos que o teorema de Pitágoras, um dos mais celebrados teoremas da Geometria Euclidiana plana, afirma que, em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Nestas notas, daremos duas provas do teorema de Pitágoras, a primeira na proposição 4.9 e a segunda no exemplo 5.7 do volume 2. Uma terceira prova elegante do mesmo pode ser encontrada em [8].

[9] Para uma construção axiomática da Geometria Euclidiana plana, referimos o leitor a [8].
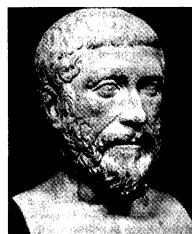
Figura 1.3: Pitágoras de Samos foi um dos maiores matemáticos da escola grega. O teorema que leva seu nome, e que afirma que, em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento do maior lado é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados, já era conhecido dos babilônios pelo menos mil anos antes de seu nascimento; no entanto, Pitágoras foi o primeiro a conseguir prová-lo. É também atribuída a Pitágoras a primeira prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

(c) Um ponto A sobre a semirreta do item (b), ao qual corresponderá o número real 1.

Se fixarmos sobre uma reta r escolhas como as especificadas pelo axioma acima, diremos que r é a **reta numerada** (cf. figura 1.4).

Para uso posterior, estabelecemos a definição a seguir.

Definição 1.9. Para reais dados $a < b$, definimos[10]:

(i) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$.

(ii) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$.

(iii) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

[10] Chamamos a atenção do leitor para as notações menos comuns $[a, b[$ em vez de $[a, b)$, $]a, b]$ no lugar de $]a, b]$, $]a, b[$ em vez de (a, b), $[a, +\infty[$ em vez de $[a, +\infty)$ e $]-\infty, a[$ no lugar de $(-\infty, a)$.

(iv) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$.

(v) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$.

(vi) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$.

(vii) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$.

($viii$) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$.

Um **intervalo** em $\mathbb{R}$ é o próprio conjunto $\mathbb{R}$ ou um conjunto de um dos sete tipos acima. Observe que, na reta numerada, um intervalo corresponde a um segmento ou semirreta (contendo ou não pelo menos uma das extremidades correspondentes), ou mesmo à reta inteira.

Observações 1.10.

i. É importante frisar que os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ (lê-se, respectivamente, *mais infinito* e *menos infinito*) *não representam* números reais. Tais símbolos servem meramente para significar que um intervalo de um dos tipos (v), (vi), (vii) ou ($viii$) acima engloba todos os números reais maiores ou iguais (resp. maiores) ou menores ou iguais (resp. menores) que a.

ii. Consoante a definição acima, denotaremos $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Dados números reais $a < b$, dizemos que a e b são as **extremidades** e que $b - a$ é o **comprimento** de cada um dos intervalos dos itens (i) a (iv) da definição acima. Nesse caso, dizemos também que tais intervalos têm comprimento *finito*. Analogamente, o número real a é a (única) extremidade de cada um dos intervalos dos itens (v) a (viii), os quais têm comprimento *infinito* (i.e., não finito). Um intervalo em $\mathbb{R}$ é **finito** ou **limitado** se tiver comprimento finito; caso contrário, o intervalo é dito **infinito** ou **ilimitado**. Em particular, os intervalos limitados de $\mathbb{R}$ são precisamente aqueles dos itens (i) a (iv) da definição acima.

Também, classificamos um intervalo finito, de extremidades $a < b$, respectivamente como **fechado**, **fechado à esquerda**, **fechado à direita** ou **aberto** quando tal intervalo for respectivamente igual a $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ ou (a, b) (note a correspondência das nomenclaturas utilizadas com o fato do intervalo conter ou não conter as extremidades a ou b). Alternativamente, dizemos que $[a, b)$ é **aberto à direita** e $(a, b]$ é **aberto à esquerda**. Por fim, aplicamos extensões óbvias dessas nomenclaturas aos intervalos infinitos. A figura 1.4 mostra um intervalo aberto à direita $[a, b)$, marcado em negrito sobre a reta numerada.

Figura 1.4: o intervalo aberto à direita $[a, b)$.

A seção a seguir pode ser omitida numa primeira leitura. Seu conteúdo só será necessário a partir da seção 4.1 do volume 2.

Problemas – Seção 1.4

1. * Em relação à interpretação geométrica dos números racionais, discutida na seção 1.4, sejam dadas frações positivas $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, explique porque a construção dada no texto associa a tais frações um mesmo ponto da reta numerada.

1.5 Supremo e ínfimo

Finalizamos este capítulo examinando a completude de $\mathbb{R}$ a partir de outro ponto de vista, para o qual precisamos de alguns conceitos preliminares.

Um subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é **limitado superiormente** se existir um número real M tal que

$$X \subset (-\infty, M].$$

Nesse caso, dizemos que M é uma **cota superior** para X. Analogamente, $X \subset \mathbb{R}$ não vazio é **limitado inferiormente** se existir um número real m tal que

$$X \subset [m, +\infty),$$

e, sendo esse o caso, dizemos que m é uma **cota inferior** para X. Por fim, $X \subset \mathbb{R}$ não vazio é **limitado** se X for simultaneamente limitado superior e inferiormente.

Dito de outra forma, um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente (resp. limitado inferiormente, limitado) se existir um real positivo a tal que

$$x \leq a \text{ (resp. } x \geq a, \ -a \leq x \leq a), \ \forall x \in X.$$

A propriedade a seguir, em que pese sua aparente obviedade, é um axioma na construção dos números reais, conhecido como a **propriedade Arquimediana** dos números naturais, em homenagem ao matemático grego Arquimedes de Siracusa. Para algumas consequências importantes da mesma, veja os problemas 1, 2 e 3, à página 32.

Axioma 1.11. O conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais é ilimitado (i.e., não limitado) superiormente.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos limitados superior e inferiormente.

Exemplos 1.12.

(a) O conjunto $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ é limitado superior e inferiormente.
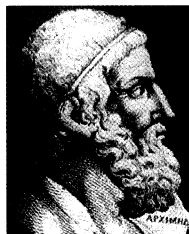
Figura 1.5: Arquimedes de Siracusa, que viveu no século III a.C., foi o maior matemático de seu tempo. Dentre suas muitas contribuições à Matemática, ressaltamos que suas ideias sobre o cálculo da área sob um segmento parabólico anteciparam, em 2000 anos, o desenvolvimento, por Newton e Leibniz, do Cálculo Integral.

(b) Intervalos limitados são conjuntos limitados no sentido da discussão acima.

Exemplo 1.13. Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, então o subconjunto Y de $\mathbb{R}$ dado por $Y = \{-x;\, x \in X\}$ é limitado inferiormente, e reciprocamente. De fato, um número real a é cota superior para X se, e só se, $-a$ é cota inferior para Y.

Fixe $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. Se $M \in \mathbb{R}$ é uma cota superior para X, então $X \subset (-\infty, M]$. No entanto, pode ocorrer que exista $M' < M$ que ainda seja uma cota superior para X, i.e., tal que $X \subset (-\infty, M']$. De fato, a condição $X \subset (-\infty, M]$ não garante que, para $M' < M$, tenhamos $X \cap (M', M] \neq \emptyset$; se ocorrer que $X \cap (M', M] = \emptyset$, então teremos $X \subset (-\infty, M']$ e M' será uma cota superior para X menor que M. Por outro lado, se $x \in X$, então nenhum real $M' < x$ é cota superior para X, uma vez que $x \in X \setminus (-\infty, M']$, i.e., $X \not\subset (-\infty, M']$.

A discussão do parágrafo anterior garante que, apesar de todo conjunto não vazio e limitado superiormente $X \subset \mathbb{R}$ possuir cota superior, não podemos tomar cotas superiores arbitrariamente pequenas para X. Por outro lado, a completude de $\mathbb{R}$, conforme postulada na seção 1.3, permite provar a seguinte resultado.

Proposição 1.14. Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente, então existe uma **menor cota superior** para X.

Reciprocamente, se assumíssemos a validade da proposição 1.14 como um *axioma*, o postulado no início da seção 1.3 (que afirma que toda sequência de algarismos define algum real) se tornaria uma proposição, a qual poderíamos provar.

De outro modo, a escolha entre impor que $\mathbb{R}$ é completo no sentido da seção 1.3 ou da proposição acima é irrelevante, posto que, como frisamos acima, tais noções de completude são *logicamente equivalentes*. Assim, doravante podemos pensar na completude de $\mathbb{R}$ de uma qualquer das maneiras acima descritas, conforme seja mais conveniente em uma ou outra situação.

Exemplos 1.15.

(a) Já sabemos que o conjunto $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ é limitado superiormente, tendo 1 como cota superior. Por outro lado, como $1 \in X$, nenhum número real menor que 1 pode ser cota superior de X e, daí, 1 é a menor cota superior de X.

(b) Se $X = (1, 2)$, então 2 é cota superior de X, mas nenhum número real menor que 2 o é. De fato, se $1 < a < 2$, então o número $\frac{1+a}{2}$ ainda é maior que 1 e menor que 2, de maneira que $\frac{1+a}{2} \in X$. Mas, como $a < \frac{1+a}{2} \in X$, o número a não pode ser cota superior de X. Então, segue que 2 é a menor cota superior de X, e veja que $2 \notin X$.

Se $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente e M é a menor cota superior de X, dizemos que M é o **supremo** de X, e denotamos

$$M = \sup X.$$

Por outro lado, se $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente, pode-se provar, como consequência da proposição 1.14 (cf. problema 6, página 34), que Y admite uma **maior cota inferior** m, também denominada o **ínfimo** de X. Denotamos, nesse caso,

$$m = \inf X.$$

Para uso futuro, colecionamos nos resultados a seguir algumas propriedades úteis das noções de supremo e ínfimo.

Proposição 1.16. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado superiormente, com $M = \sup X$. Se $n \in \mathbb{N}$, então existe $x \in X$ tal que

$$M - \frac{1}{n} < x \leq M.$$

Prova. Como M é a menor cota superior de X e $M - \frac{1}{n} < M$, o número $M - \frac{1}{n}$ não é uma cota superior de X. Portanto, existe $x \in X$ tal que $x > M - \frac{1}{n}$. Mas, como $X \subset (-\infty, M]$, devemos ter $x \leq M$. ■

O problema 7, página 34, traz um resultado análogo ao acima para ínfimos de conjuntos limitados inferiormente.

Proposição 1.17. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios. Se $x \leq y$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$, então X é limitado superiormente, Y é limitado inferiormente e

$$\sup X \leq \inf Y.$$

Prova. Fixe $y \in Y$ qualquer. Como $x \leq y$, para todo $x \in X$, temos $X \subset (-\infty, y]$, i.e., y é uma cota superior para X. Portanto, X é limitado superiormente e, sendo $M = \sup X$ (a *menor* cota superior de X), temos $M \leq y$.

Observe agora que, como escolhemos $y \in Y$ arbitrariamente, o argumento do parágrafo anterior mostra que, *para todo* $y \in Y$, temos $M \leq y$. Portanto, $Y \subset [M, +\infty)$, i.e., M é uma cota inferior para Y. Logo, Y é limitado inferiormente e, sendo $m = \inf Y$ (a *maior* cota inferior de Y), temos $M \leq m$. ■

Nosso próximo resultado fornece uma condição suficiente para a ocorrência da igualdade na proposição anterior.

Proposição 1.18. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios, sendo X limitado superiormente, Y limitado inferiormente e $\sup X \leq \inf Y$. Se, para todo $n \in \mathbb{N}$, existirem $x_n \in X$ e $y_n \in Y$ tais que $y_n - x_n < \frac{1}{n}$, então $\sup X = \inf Y$.

Prova. Sejam $M = \sup X$, $m = \inf Y$ e suponha que fosse $M < m$. Como $x \leq M < m \leq y$, para todos $x \in X$ e $y \in Y$, teríamos

$$y - x \geq m - M,$$

para todos $x \in X$, $y \in Y$. Mas, se escolhêssemos um natural $n > \frac{1}{m-M}$ (o que é possível, pelo axioma 1.11), nossas hipóteses garantiriam a existência de números reais $x_n \in X$ e $y_n \in Y$ tais que

$$y_n - x_n < \frac{1}{n} < m - M,$$

o que nos dá uma contradição! Por fim, como a suposição de que $\sup X < \inf Y$ nos leva a uma conclusão contraditória, a única possibilidade é que seja $\sup X = \inf Y$. ■

Uma última observação: comentamos anteriormente que, fixados $x > 0$ real e $n > 1$ natural, *é possível provar* a existência de um

único real positivo y tal que $y^n = x$, e denotamos $y = \sqrt[n]{x}$. Pois bem: a noção de supremo e ínfimo é o que nos faltava para provar tal existência. De fato, se definirmos

$$X = \{a \in \mathbb{R};\ a \geq 0 \text{ e } a^n < x\},$$

então X é não vazio (pois $0 \in X$) e limitado superiormente (pois, como $x+1 > 1$, o item (b) do corolário 1.3 garante que $(x+1)^n > x+1 > x$ e, daí, $x+1 \notin X$; analogamente, todo real maior que $x+1$ não pertence a X, de maneira que $X \subset (-\infty, x+1)$).

Sendo não vazio e limitado superiormente, X tem supremo, digamos y, e é possível mostrar (embora os detalhes sejam um tanto quanto envolventes) que $y^n = x$. A ideia geral é a seguinte:

- Se $y^n < x$, então somos capazes de obter um real positivo z tal que $y^n < z^n < x$. Mas tais desigualdades nos dão (cf. problema 6, página 15) $y < z \in X$, contradizendo o fato de que y é uma cota superior de X.

- Se $y^n > x$, então somos capazes de obter um real positivo z tal que $x < z^n < y^n$. Agora, sendo $a \in X$ qualquer, segue de $a^n < x < z^n < y^n$ que (novamente pelo problema 6, página 15) $a < z < y$ e, daí, z é uma cota superior de X menor que y. Mas isso contradiz o fato de que y é a menor cota superior de X.

- Não podendo ser $y^n < x$ nem $y^n > x$, a única possibilidade é que seja $y^n = x$.

Problemas – Seção 1.5

1. * Use a propriedade Arquimediana do conjunto dos naturais para provar os seguintes itens:

   (a) Se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 \leq a < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a = 0$.

   (b) Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $an + b > c$.

2. * Sejam a e b racionais dados, com $a < b$. Prove que:

   (a) $a < \frac{a+b}{2} < b$ e $a < a + \frac{b-a}{\sqrt{2}} < b$.

   (b) O intervalo (a, b) contém infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

3. * O objetivo deste problema é generalizar o resultado do problema anterior, mostrando que entre dois números reais quaisquer sempre há um número racional e um número irracional (por causa dessa propriedade, dizemos que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são **densos** em $\mathbb{R}$). Para tanto, sejam dados números reais a e b, com $a < b$, e faça os seguintes itens:

   (a) Mostre que basta considerar o caso $a \geq 0$.

   (b) Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < b - a$ e $0 < \frac{\sqrt{2}}{n} < b - a$.

   (c) Sendo $a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ escolhido como em (b), mostre que um dos números $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$ e um dos números $\frac{\sqrt{2}}{n}, \frac{2\sqrt{2}}{n}, \frac{3\sqrt{2}}{n}, \ldots$ pertencem ao intervalo (a, b).

4. * Um número racional $r \in [0, 1]$ é dito **diádico** se existirem $k, n \in \mathbb{Z}$ tais que $0 \leq n \leq 2^k$ e $r = \frac{n}{2^k}$. Prove que o conjunto dos racionais diádicos é denso em $[0, 1]$.

5. Sejam $X = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 < x < 1\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};\ 0 < y < 1\}$. Prove que

$$\inf X = \inf Y = 0 \quad \text{e} \quad \sup X = \sup Y = 1.$$

6. * Se $Y \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado inferiormente, prove que existe uma maior cota inferior para Y.

7. * Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado inferiormente, com $m = \inf Y$. Se $n \in \mathbb{N}$, prove que existe $y \in Y$ tal que

$$m \leq y < m + \frac{1}{n}.$$

CAPÍTULO 2

Produtos Notáveis e Equações

O restante deste volume tem um duplo propósito. Por um lado, desenvolve e exercita a aplicação de várias ferramentas necessárias a uma apresentação adequada dos conteúdos dos volumes posteriores; por outro, apresenta ao leitor várias ideias e resultados que, em que pese seus caracteres elementares, configuram-se de suma importância em si mesmos, na medida em que admitem larga aplicabilidade e familiarizam o leitor com aspectos mais profundos da aritmética do conjunto dos números reais.

Começamos estudando, neste capítulo, algumas *identidades algébricas* (também conhecidas como *produtos notáveis*) e equações relevantes.

2.1 Identidades algébricas

Para o restante destas notas, denominamos **variáveis** números reais fixados mas arbitrários. Variáveis serão em geral denotadas por letras latinas minúsculas, como por exemplo a, b, c, x, y, z, etc (uma exceção importante é mencionada no próximo parágrafo).

Uma **expressão algébrica**, ou simplesmente uma *expressão*, é um número real formado a partir de uma quantidade finita de variáveis reais, possivelmente com o auxílio de uma ou mais dentre as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação (sempre que os resultados tiverem sentido em $\mathbb{R}$), as quais denominamos **operações algébricas**. Assim, por exemplo,

$$\frac{x+\sqrt{y}-x^2z}{yz}+3\sqrt[5]{x^2yz^3-x^4}$$

é uma expressão algébrica que tem sentido para todos os reais x, y, z tais que $y > 0$ e $z \neq 0$ (lembre que o problema 1, página 21, garante que podemos extrair raízes de índice ímpar de todo número real). Em particular, toda variável pode ser vista como uma expressão algébrica. Denotaremos expressões algébricas em geral por meio de letras latinas *maiúsculas*, por exemplo E, F, etc.

Dizemos que uma expressão algébrica E é um **monômio** se E for um produto um número real não-nulo dado por potências de expoentes inteiros não-negativos de suas variáveis. Por exemplo, os monômios em x, y são as expressões da forma ax^ky^l, onde $a \neq 0$ é um real dado e $k, l \geq 0$ são números inteiros (convencionamos aqui que $x^k = 1$ caso $k = 0$, adotando convenção análoga quanto a y^l – veja o problema 15, página 17). Para um monômio qualquer, o real não-nulo dado que faz o papel de a em ax^ky^l é o **coeficiente** do monômio. Assim, os monômios em x, y com coeficiente 2 são aqueles da forma

$$2,\ 2x\ 2y,\ 2x^2,\ 2xy,\ 2y^2,\ 2x^3,\ 2x^2y,\ 2xy^2,\ 2y^3,\ \text{etc}$$

(lembre que, em ax^ky^l, podemos ter $k = 0$ ou $l = 0$).

Uma **expressão polinomial** ou **polinômio** é (uma expressão que é) uma soma finita de monômios, como por exemplo

$$2+3xy-\sqrt{5}x^2yz.$$

Os **coeficientes** de um polinômio são os coeficientes de seus monômios.

Sejam E e F expressões algébricas. Dizemos que a igualdade $E = F$ é uma **identidade algébrica** se for verdadeira para todos os valores reais possíveis das variáveis envolvidas. Para exemplificar, consideremos a expressão algébrica $E = (x + y)^2$. Pelas propriedades básicas das operações de adição e multiplicação de números reais (i.e., comutatividade e associatividade da adição e multiplicação, distributividade da multiplicação em relação à adição) temos

$$\begin{aligned} E &= (x+y)(x+y) = x(x+y)+y(x+y) \\ &= (x^2+xy)+(yx+y^2) \\ &= x^2+2xy+y^2, \end{aligned}$$

para todas as variáveis reais x e y. Portanto, pondo $F = x^2+2xy+y^2$ obtemos a identidade algébrica $E = F$, i.e.,

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2, \tag{2.1}$$

à qual nos referiremos doravante como a *fórmula* para o quadrado da soma de dois números reais.

A proposição a seguir coleciona algumas identidades algébricas importantes, as quais devem ser guardadas para uso futuro.

Proposição 2.1. Para todos os $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:

(*a*) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

(*b*) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$.

(c) $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$.

(d) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy(x \pm y)$.

(e) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Prova. Deixamos as provas dos itens (a), (b) e (c) como exercícios, observando que a identidade do item (b), com o sinal +, foi estabelecido em (2.1) (veja o problema 1, página 43). Provemos em (d) a identidade para $(x + y)^3$, sendo aquela para $(x - y)^3$ totalmente análoga: utilizando a distributividade da multiplicação em relação à adição e a identidade (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 = x(x+y)^2 + y(x+y)^2 \\
&= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2) \\
&= (x^3 + 2x^2y + xy^2) + (x^2y + 2xy^2 + y^3) \\
&= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 \\
&= x^3 + y^3 + 3xy(x+y).
\end{aligned}$$

Para (e), apliquemos (b) com $x+y$ no lugar de x e z no lugar de y:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^2 &= [(x+y)+z]^2 \\
&= (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2 \\
&= (x^2 + 2xy + y^2) + 2(xz + yz) + z^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.
\end{aligned}$$

■

Observação 2.2. Alternativamente, é costume denominarmos **produto notável** a uma identidade $E = F$ tal que E é um produto de (pelo menos dois) polinômios e F a soma dos monômios resultantes da expansão desse produto. Assim, frequentemente nos referiremos às identidades dos itens (b), (d) e (e) da proposição acima como *produtos notáveis*. Por outro lado, uma identidade $E = F$ na qual E é um polinômio e F é um produto de (pelo menos dois) polinômios é usualmente denominada uma **fatoração**. As identidades dos itens (a) e (c) da proposição acima são exemplos de fatorações. Doravante, utilizaremos as nomenclaturas alternativas acima para identidades envolvendo polinômios sem maiores comentários.

Os exemplos a seguir nos dão uma ideia de como utilizar as vários identidades acima na solução de muitos problemas interessantes.

Exemplo 2.3. Sejam x, y, z reais não todos nulos, tais que $x+y+z = 0$. Explique porque $xy + xz + yz \neq 0$ e calcule em seguida os possíveis valores da expressão

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}.$$

Solução. Elevando ambos os membros da igualdade $x + y + z = 0$ ao quadrado, segue do item (e) da proposição 2.1 que $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 0$. Se $xy + xz + yz = 0$, teríamos $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, e uma simples extensão do corolário 1.5 (cf. problema 13, página 16) nos daria $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, uma contradição. Portanto, $xy + xz + yz \neq 0$, e segue de $x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + xz + yz)$ que

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} = -2.$$

■

O exemplo a seguir mostra como usar as identidades que conhecemos até agora para provar *desigualdades*[1].

Exemplo 2.4 (Polônia)**.** Se a e b são reais positivos dados, prove que $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.

Prova. Desenvolvendo o segundo membro com o auxílio da identidade do item (d) da proposição 2.1, é imediato que a desigualdade do

[1] Faremos uma discussão mais completa sobre desigualdades no Capítulo 7.

enunciado é equivalente à desigualdade $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$. Basta, agora, ver que

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 &= a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 = a^2(a-b) - b^2(a-b) \\ &= (a^2 - b^2)(a-b) = (a+b)(a-b)(a-b) \\ &= (a+b)(a-b)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

uma vez que $a + b > 0$ e $(a-b)^2 \geq 0$. ■

Generalizamos o exemplo 1.7 no que segue.

Exemplo 2.5 (Áustria). Sejam a e b racionais positivos tais que $\sqrt{ab}$ é irracional. Prove que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é irracional.

Prova. Por contraposição, suponha que $r = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ fosse racional. Então $r^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$ também seria racional. Mas aí, teríamos

$$\sqrt{ab} = \frac{r^2 - a - b}{2},$$

também racional, uma vez que no segundo membro da igualdade acima o numerador e o denominador são números racionais. ■

Exemplo 2.6 (Canadá). Para cada n natural, mostre que o número

$$n(n+1)(n+2)(n+3)$$

nunca é um quadrado perfeito.

Prova. Denote $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$. Temos

$$\begin{aligned} p &= [n(n+3)][(n+1)(n+2)] \\ &= (n^2 + 3n)[(n^2 + 3n) + 2] \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) \\ &= [(n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1] - 1 \\ &= [(n^2 + 3n) + 1]^2 - 1. \end{aligned}$$

Sendo $m = n^2 + 3n + 1$, temos $m > 1$, e daí

$$p = m^2 - 1 > m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2.$$

Portanto, p está situado entre os quadrados perfeitos consecutivos $(m-1)^2$ e m^2. Em particular, p não pode ser um quadrado perfeito. ■

Um produto notável por vezes útil, mas não contemplado pela proposição 2.1, é o dado pela igualdade

$$(x-y)(x-z) = x^2 - (y+z)x + yz. \tag{2.2}$$

Observe que no segundo membro aparecem a soma $S = y + z$ e o produto $P = yz$ de y e z. Uma expressão do tipo $x^2 - Sx + P$, onde S e P representam respectivamente a soma e o produto de dois números ou expressões, é denominada um **trinômio de segundo grau** em x. Assim, podemos ver (2.2) também como um produto notável que fornece a **fatoração** de um trinômio de segundo grau:

$$x^2 - Sx + P = (x-y)(x-z), \tag{2.3}$$

onde $S = y + z$ e $P = yz$. A fatoração acima é por vezes denominada **fórmula de Viète**.

Vejamos como aplicar a fórmula de Viète no exemplo a seguir.

Exemplo 2.7 (União Soviética). Sejam a, b e c números reais dois a dois distintos. Mostre que o número

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)$$

é sempre diferente de zero.

Figura 2.1: François Viète, matemático francês do século XVI. Por seu pioneirismo na utilização de letras para representar variáveis, Viète é por vezes conhecido como o pai da Álgebra moderna.

Prova. Denotando por S o número dado acima, temos:

$$\begin{aligned} S &= a^2(c-b)+b^2a-b^2c+c^2b-c^2a \\ &= a^2(c-b)+(b^2a-c^2a)+(c^2b-b^2c) \\ &= a^2(c-b)+a(b+c)(b-c)+bc(c-b) \\ &= (c-b)[a^2-a(b+c)+bc] \\ &= (c-b)(a-b)(a-c), \end{aligned}$$

onde utilizamos (2.3) na última igualdade. Agora, segue de $a \neq b$, $b \neq c$ e $c \neq a$ que $a-b, c-b, a-c \neq 0$, e daí $S \neq 0$. ■

Uma variante útil da fórmula de Viète, de verificação imediata, é a fatoração para a expressão x^2+Sx+P, onde, como antes, $S=y+z$ e $P=yz$:

$$x^2+Sx+P=(x+y)(x+z). \tag{2.4}$$

Trocando, em (2.3), S, y e z respectivamente por $-S$, $-y$ e $-z$, vemos imediatamente que (2.4) é realmente equivalente àquela fatoração, de maneira que é bastante fácil lembrarmo-nos de mais essa identidade. Vejamos um exemplo de sua aplicação, o qual encerra mais uma identidade relevante em si.

Exemplo 2.8. Para todos os $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z). \tag{2.5}$$

Prova. Aplicando duas vezes o item (d) da proposição 2.1, primeiro com $x+y$ no lugar de x e z no lugar de y, obtemos

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &= [(x+y)+z]^3 \\ &= (x+y)^3+z^3+3(x+y)z[(x+y)+z] \\ &= x^3+y^3+3xy(x+y)+z^3+3(x+y)[(x+y)z+z^2) \\ &= x^3+y^3+z^3+3(x+y)[xy+(x+y)z+z^2] \\ &= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(x+z), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos (2.4). ■

Problemas – Seção 2.1

1. * Prove os demais itens da proposição 2.1.

2. Se $m+n+p=6$, $mnp=2$ e $mn+mp+np=11$, calcule o valor de $\frac{m}{np}+\frac{n}{mp}+\frac{p}{mn}$.

3. Sejam a e b reais não nulos, tais que $a \neq b, 1$. Se $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2$, calcule os possíveis valores de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

4. Para reais positivos x e y, simplifique a expressão

$$\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+2\sqrt{xy}}.$$

5. Para $x, y, z \neq 0$, simplifique a expressão

$$\frac{(x^3+y^3+z^3)^2-(x^3-y^3-z^3)^2}{y^3+z^3}.$$

6. Se a e b são números reais tais que $ab = 1$, simplifique a expressão

$$\frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)}{a^2-b^2}.$$

7. Se x e y são naturais tais que $x^2+361 = y^2$, calcule os possíveis valores de x.

8. Os reais a e b são tais que $a+b = m$ e $ab = n$. Calcule o valor de a^4+b^4 em termos de m e n.

9. Se $a^2+b^2 = 1$, calcule os possíveis valores de $\frac{1-3(ab)^2}{a^6+b^6}$.

10. (Hungria.) Sejam a, b, c e d números reais tais que $a^2+b^2 = 1$ e $c^2+d^2 = 1$. Se $ac+bd = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcule o valor de $ad-bc$, sabendo que se trata de um número positivo.

11. (OBM.) Encontre todos os inteiros positivos x e y tais que $x+y+xy = 120$.

12. * Para reais positivos e distintos x e y, prove que são válidas as seguintes *racionalizações*[2]:

    (a) $\frac{1}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{x-y}$.

    (b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x\pm y}$.

    (c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y}}{x\pm y}$.

[2]De uma maneira informal, podemos pensar na operação de *racionalização* como a *retirada de raízes* do denominador.

13. * Para $n > 1$ inteiro, mostre que

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$$

14. Racionalize o número $\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

15. Racionalize o número $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$, i.e., obtenha números inteiros a, b, c, d, e, f e g tais que

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{g}[(a\sqrt{2}+b)+(c\sqrt{2}+d)\sqrt[3]{3}+(e\sqrt{2}+f)\sqrt[3]{9}].$$

16. Sejam x, y e z números reais não nulos, tais que $x+y+z = 0$. Explique porque a soma de dois quaisquer dentre eles é diferente de zero e, em seguida, calcule os possíveis valores de cada uma das expressões abaixo:

    (a) $\frac{x^2}{(y+z)^2}+\frac{y^2}{(x+z)^2}+\frac{z^2}{(x+y)^2}$.

    (b) $\frac{x^3}{(y+z)^3}+\frac{y^3}{(x+z)^3}+\frac{z^3}{(x+y)^3}$.

17. Dados números reais a e b, encontre o quociente da divisão de $a^{64}-b^{64}$ por $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$.

18. * Dados um inteiro $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, prove que são válidas as seguintes fatorações:

    (a) $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$.

    (b) $a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$ se n for ímpar.

19. Fatore a expressão x^4+4y^4 como um produto de dois polinômios de coeficientes inteiros.

20. (Canadá.) Prove que 6 divide $a+b+c$ se, e só se, 6 divide $a^3+b^3+c^3$.

21. (Canadá.) Sejam a, b e c números reais tais que $a + b + c = 0$. Mostre que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

22. Prove a *fórmula do radical duplo*, também conhecida como *fórmula de Báskara*[3]: para todos os números reais a e b, com $a^2 \geq b \geq 0$, tem-se

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

23. Mostre que não existem números reais não nulos x, y e z, tais que $x + y + z \neq 0$ e

$$\frac{1}{x + y + z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

24. (União Soviética.) Sejam a, b e c racionais dois a dois distintos. Prove que o número

$$\frac{1}{(b - c)^2} + \frac{1}{(c - a)^2} + \frac{1}{(a - b)^2}$$

é o quadrado de um racional.

25. Dados $a, b > 0$, prove que $\sqrt[3]{4(a + b)} \leq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $a = b$.

26. (Torneio das Cidades.) Sejam a, b e c racionais positivos. Se $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$, prove que $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$.

27. (Torneio das Cidades.) Suponha que $a + b + c + d + e + f = 0$, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 = 0$ e que a soma de dois quaisquer dos reais a, b, c, d, e, f é não nula. Prove que

$$(a + c)(a + d)(a + e)(a + f) = (b + c)(b + d)(b + e)(b + f).$$

[3]Uma homenagem ao matemático indiano do século XII Bhaskara II, também conhecido como Bhaskaracharya (Báskara, o professor).

28. (Polônia.) Para inteiros positivos $a \leq b$, faça os itens a seguir:

    (a) Mostre que $b^3 < b^3 + 6ab + 1 < (b + 2)^3$.

    (b) Ache todos tais a e b para os quais $a^3 + 6ab + 1$ e $b^3 + 6ab + 1$ sejam ambos cubos perfeitos.

2.2 Módulo e equações modulares

Dadas expressões algébricas E e F em uma mesma variável, x digamos, a **equação a uma variável** $E = F$ é o problema de encontrar todos os valores reais de x para os quais as expressões E e F tenham sentido e a igualdade $E = F$ seja verdadeira. Se $E = F$ é uma equação na variável x, dizemos que x é a **incógnita** da equação; os valores reais de x que *resolvem* a equação $E = F$, i.e., que tornam $E = F$ uma igualdade verdadeira, são as **raízes** da equação; por fim, o **conjunto solução** é aquele formado por todas as raízes da mesma.

No restante deste capítulo, discutiremos alguns tipos importantes de equações a uma variável. Para começar, dados números reais a e b, com $a \neq 0$, podemos considerar a **equação de primeiro grau** $ax + b = 0$. Como $a \neq 0$, temos

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a},$$

de maneira que $-\frac{b}{a}$ é a única raiz da equação.

A fim de examinar nossa segunda classe de equações, necessitamos inicialmente da seguinte

Definição 2.9. Para $x \in \mathbb{R}$, o **módulo** de x, denotado $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Para exemplificar a definição acima, uma vez que $-5 < 0$ temos $|-5| = -(-5) = 5$; analogamente, $|-\sqrt{3}| = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, etc. Mais geralmente, uma consequência imediata da definição é que $|x| \geq 0$ para todo real x, ocorrendo a igualdade se e só se $x = 0$. Ademais, tem-se sempre

$$x \leq |x| = |-x|,$$

com igualdade se e só se $x \geq 0$. Note ainda que

$$|x| = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\}. \tag{2.6}$$

Representando os números reais como pontos da reta numerada, é fácil ver que o módulo de um número real x é simplesmente a distância de x a 0 (cf. figura 2.2). Mais geralmente, dados $x, y \in \mathbb{R}$, podemos
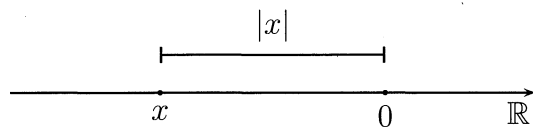
Figura 2.2: módulo de um número real.

olhar $|x - y|$ como a distância entre os pontos x e y na reta. De fato, como $|x - y| = |y - x|$, podemos supor que $x \leq y$. Então

$$|x - y| = y - x = \text{distância de } x \text{ a } y \text{ na reta.}$$

A **equação modular** mais simples é a equação

$$|x - a| = b,$$

com a e b reais dados. Como $|x - a| \geq 0$, tal equação não admite raízes quando $b < 0$. Quando $b \geq 0$, segue da definição de módulo que deve ser $x - a = b$ ou $x - a = -b$, donde temos as raízes

$$x = a + b, a - b.$$

O exemplo a seguir mostra como resolver uma equação mais elaborada envolvendo módulos.

Exemplo 2.10. Resolva a equação $|x + 1| + |x - 2| + |x - 5| = 7$.

Solução. Note primeiro que

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases},$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

e

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{se } x \geq 5 \\ -x+5, & \text{se } x < 5 \end{cases}.$$

Agora, desde que a interseção das condições $x < -1$ ou $x \geq -1$, $x < 2$ ou $x \geq 2$, $x < 5$ ou $x \geq 5$ particiona a reta nos intervalos $(-\infty, -1)$, $[-1, 2)$, $[2, 5)$ e $[5, +\infty)$, faz-se mister considerar separadamente x em cada um de tais intervalos, a fim de simplificar o primeiro membro da equação. Procedendo desta maneira, obtemos

$$|x+1| + |x-2| + |x-5| = \begin{cases} -3x+6, & \text{se } x < -1 \\ -x+8, & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ x+4, & \text{se } 2 \leq x < 5 \\ 3x-6, & \text{se } x \geq 5 \end{cases}.$$

Por fim, note que

- $-3x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$; como a condição $-\frac{1}{3} < -1$ não é satisfeita, não há soluções neste caso.
- $-x + 8 = 7 \Leftrightarrow x = 1$; como a condição $-1 \leq 1 < 2$ é satisfeita, $x = 1$ é solução da equação.
- $x + 4 = 7 \Leftrightarrow x = 3$; como a condição $2 \leq 3 < 5$ é satisfeita, $x = 3$ é solução da equação.

- $3x - 6 = 7 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}$; como a condição $\frac{13}{3} \geq 5$ não é satisfeita, não há soluções neste caso.

Logo, as raízes da equação são 1 e 3. ■

Problemas – Seção 2.2

1. * Dados números reais a e b, com $a \neq 0$, mostre que

$$\{x \in \mathbb{R};\ ax + b > 0\} = \begin{cases} \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right), & \text{se } a > 0 \\ \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right), & \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Faça o mesmo para $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ e $ax + b \leq 0$.

2. * Dados números reais a e b, mostre que

$$\{x \in \mathbb{R};\ |x - a| < b\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } b < 0 \\ \{a\}, & \text{se } b = 0 \\ (a - b, a + b), & \text{se } b > 0 \end{cases}.$$

Faça o mesmo para $|x - a| \leq b$, $|x - a| > b$ e $|x - a| \geq b$.

3. * Prove que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $|xy| = |x| \cdot |y|$.

4. Resolva, para $x \in \mathbb{R}$, as seguintes equações:

(a) $x^2 + 5|x - 1| + 11 = 0$.

(b) $|x^2 - 3x| = x - 1$.

(c) $x + \left|\frac{5}{x+1} - 3\right| = 6$.

(d) $x|x| + 4x + 3 = 0$.

(e) $|x| = x - 6$.

(f) $|x + 1| + |x - 2| + |x - 5| = 4$.

5. Resolva, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, a equação $\frac{|x|}{x} = \frac{|x-1|}{x-1}$.

6. Sejam a, b, c números reais dados, com $a < b$. Discuta, em função de c, o número de soluções da equação

$$|x - a| + |x - b| = c.$$

7. Para $n > 1$ inteiro, prove que a equação (em $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} &|x - 1| + |x - 2| + \cdots + |x - 2n| = \\ &= ((n + 1) + (n + 2) + \cdots + 2n) - (1 + 2 + \cdots + n) \end{aligned}$$

tem uma infinidade de raízes.

8. (México.) Seja r um racional não negativo. Prove que

$$\left|\frac{r + 2}{r + 1} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}|r - \sqrt{2}|.$$

9. (Iugoslávia.) Dados n natural e $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, sejam $M_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $M_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ subconjuntos de M tais que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ e $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Se $M_1 \cup M_2 = M$ e $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, prove que

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2.$$

2.3 Equações de segundo grau

Consideremos, agora, a **equação de segundo grau**

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.7}$$

onde a, b e c são reais dados, sendo $a \neq 0$. Por razões que ficarão claras mais adiante (veja a discussão que culmina com a fatoração

(2.10)), o primeiro membro de (2.7) também é denominado o **trinômio de segundo grau** associado à equação (2.7), e a, b e c são seus **coeficientes**.

Dada uma equação de segundo grau como acima, denotamos por Δ (leia-se *delta*) o número

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Tal número é o **discriminante** da equação (ou do trinômio associado) (2.7), e, conforme veremos, será usado para *discriminar* (daí o nome!) quando a mesma possui raízes. Para tanto, comecemos com o seguinte resultado auxiliar.

Lema 2.11. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tem-se

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \quad (2.8)$$

A identidade algébrica acima é a **forma canônica** do trinômio de segundo grau $ax^2 + bx + c$.

Prova. Basta ver que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$ ■

Observação 2.12. A ideia de somar e subtrair certo termo a uma expressão dada a fim de *completar um quadrado*, como feito após a

segunda igualdade na prova do lema anterior, é bastante importante e deve ser apreendida como um tipo de *truque algébrico* que encontrará utilidade em muitas de nossas discussões posteriores, bem como na resolução de vários problemas interessantes. Veremos mais aplicações do truque de completamento de quadrados ainda neste capítulo.

Proposição 2.13. Sejam a, b, c reais dados, com $a \neq 0$.

(*a*) A equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem raízes reais se e só se $\Delta \geq 0$. Nesse caso, suas raízes são dadas por $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

(*b*) Se $\Delta \geq 0$, então a soma S e o produto P das raízes da equação do item (*a*) são dados por $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$.

Prova.
(a) Segue de (2.8) que

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \quad (2.9)$$

Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se a equação tiver raízes reais, então deve ser $\Delta \geq 0$. Nesse caso, é evidente de (2.9) (veja também o problema 1, página 56) que $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, donde segue o item (a).

(b) Basta observar que

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

e

$$\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$ ■

Observações 2.14.

i. Quando $\Delta \geq 0$, a fórmula $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ para as raízes da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é conhecida como a **fórmula de Bhaskara**.

ii. As fórmulas do item (b) da proposição acima são também conhecidas como **fórmulas de Viète**.

iii. Nas notações do item (a) da proposição acima, se $\Delta = 0$ diremos que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem *duas raízes iguais*.

O exemplo a seguir ilustra como podemos reduzir uma equação aparentemente complicada numa mais simples por meio de uma **substituição de variável** conveniente.

Exemplo 2.15 (OBM). Encontre todos os reais x tais que $x^2+x+1 = \frac{156}{x^2+x}$.

Prova. Fazendo a substituição de variável $y = x^2 + x$, obtemos a equação $y+1 = \frac{156}{y}$, ou ainda $y^2+y-156 = 0$. Como para tal equação temos $\Delta = 1^2 - 4(-156) = 625 = 25^2$, segue que $y = \frac{-1\pm 25}{2} = -13$ ou 12. Mas desde que $y = x^2 + x$, reduzimos nossa equação original às equações de segundo grau $x^2 + x = -13$ ou $x^2 + x = 12$. Na primeira equação, temos $\Delta = -51 < 0$ e, portanto, não há raízes reais. Na segunda, $\Delta = 49$, de maneira que $x = \frac{-1\pm 7}{2} = -4$ ou 3. ■

O exemplo a seguir mostra que é por vezes mais útil *manipular algebricamente* uma equação de segundo grau do que resolvê-la explicitamente.

Exemplo 2.16. Encontre o valor de $(3+\sqrt{2})^5+(3-\sqrt{2})^5$ sem expandir as potências envolvidas.

Prova. Sendo $u = 3 + \sqrt{2}$ e $v = 3 - \sqrt{2}$, temos $u + v = 6$ e $uv = 7$, donde segue que u e v são as raízes da equação $x^2 - 6x + 7 = 0$. Portanto, a substituição de x por u ou v nessa equação gera as igualdades verdadeiras $u^2 - 6u + 7 = 0$ e $v^2 - 6v + 7 = 0$, ou, equivalentemente, $u^2 = 6u - 7$ e $v^2 = 6v - 7$. Multiplicando a primeira dessas igualdades por u^k e a segunda por v^k, onde $k \geq 0$ é inteiro, obtemos as igualdades

$$u^{k+2} = 6u^{k+1} - 7u^k \quad \text{e} \quad v^{k+2} = 6v^{k+1} - 7v^k;$$

somando membro a membro as relações acima, obtemos finalmente

$$u^{k+2} + v^{k+2} = 6(u^{k+1} + v^{k+1}) - 7(u^k + v^k).$$

Escrevendo a relação acima respectivamente para $k = 0$, 1, 2 e 3, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
u^2 + v^2 &= 6(u + v) - 7 \cdot 2 = 6 \cdot 6 - 14 = 22 \\
u^3 + v^3 &= 6(u^2 + v^2) - 7(u + v) = 6 \cdot 22 - 7 \cdot 6 = 90 \\
u^4 + v^4 &= 6(u^3 + v^3) - 7(u^2 + v^2) = 6 \cdot 90 - 7 \cdot 22 = 386 \\
u^5 + v^5 &= 6(u^4 + v^4) - 7(u^3 + v^3) = 6 \cdot 386 - 7 \cdot 90 = 1686.
\end{aligned}$$ ■

Para o próximo exemplo, veja que se a soma e o produto de dois números reais forem positivos, então ambos os números são positivos.

Exemplo 2.17 (OCM). Sejam p e q reais dados. Se as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$ são reais, positivas e distintas, mostre que o mesmo ocorre com as raízes da equação $qx^2 + (p - 2q)x + (1 - p) = 0$.

Prova. Note inicialmente que $q \neq 0$, pois do contrário a equação $x^2 + px + q = 0$ se reduziria a $x^2 + px = 0$, e daí teria uma raiz igual a 0, contradizendo nossas hipóteses.

Sejam agora Δ e Δ' respectivamente os discriminantes dos trinômios $x^2 + px + q = 0$ e $qx^2 + (p - 2q)x + (1 - p)$. Mostremos primeiro que $\Delta' > 0$, o que garantirá que as raízes da segunda equação são reais e distintas. Como a equação $x^2 + px + q = 0$ tem raízes reais e distintas, temos $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta' &= (p - 2q)^2 - 4q(1 - p) \\
&= p^2 - 4q + 4q^2 \\
&= \Delta + 4q^2 > 0.
\end{aligned}$$

Agora, de acordo com o parágrafo imediatamente anterior a este exemplo, para mostrar que as raízes de $qx^2 + (p - 2q)x + (1 - p) = 0$

são positivas, basta mostrarmos que a soma S' e o produto P' das mesmas são ambos positivos. Ora, desde que as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$ são positivas, temos $-p > 0$ e $q > 0$. Portanto, pelas fórmulas de Viète, temos

$$S' = \frac{2q - p}{q} = 2 + \frac{-p}{q} > 0$$

e

$$P' = \frac{1 - p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{-p}{q} > 0.$$

■

Terminemos nossa discussão sobre equações de segundo grau com a seguinte observação: se $a \neq 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$ tiver raízes reais α e β (não necessariamente $\alpha \neq \beta$), então teremos a fatoração

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta). \tag{2.10}$$

De fato, segue do item (b) da proposição 2.13 que, para todo x real,

$$\begin{aligned} a(x-\alpha)(x-\beta) &= a[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta] \\ &= a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] \\ &= ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

É instrutivo comparar o resultado de (2.10) com (2.2). O segundo membro de (2.10) é denominado a **forma fatorada** do trinômio $ax^2 + bx + c$.

Problemas – Seção 2.3

1. * Dado um real $a \neq 0$, encontre todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 = a^2$, sem recorrer à fórmula para as raízes de uma equação de segundo grau.

2. Sejam a, b e c reais dados. Se $ac < 0$, mostre que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais distintas.

3. Se as soluções da equação $x^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, calcule os valores de a e b.

4. Sejam b, c números reais dados, tais que a equação $x^2 + b|x| + c = 0$ tenha raízes reais. Prove que a soma de tais raízes é sempre igual a 0.

5. Resolva, para $x \in \mathbb{R}$, as seguintes equações:

   (a) $x + \sqrt{x+2} = 10$.

   (b) $\sqrt{x+10} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{1-3x}$.

   (c) (OCM.) $x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$.

6. (IMO.) Em cada um dos casos (a) $A = \sqrt{2}$, (b) $A = 1$ e (c) $A = 2$, encontre os valores reais de x para os quais tenhamos

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = A.$$

7. Um professor elaborou três modelos de prova. No primeiro modelo, colocou uma equação do segundo grau; no segundo modelo, colocou a mesma equação, trocando apenas o coeficiente do monômio de grau dois; no terceiro modelo, colocou a mesma equação do primeiro modelo, trocando apenas o coeficiente independente de x. Sabendo que as raízes da equação do segundo modelo são 2 e 3 e que as raízes do terceiro modelo são 2 e -7, decida se a equação do primeiro modelo tem raízes reais e, se esse for o caso, calcule tais raízes.

8. Sejam a e b reais não nulos e distintos. Se a equação $x^2 + ax + b = 0$ tem raízes a e b, encontre os possíveis valores de $a - b$.

9. Se as raízes da equação $x^2 - 13x + 9 = 0$ são α e β, e a e b são reais tais que a equação $x^2 + ax + b = 0$ tem raízes α^2 e β^2, calcule o valor de $a + b$.

10. A equação $x^2+x-1 = 0$ tem raízes u e v. Encontre uma equação de segundo grau que tenha raízes u^3 e v^3.

11. (OCM.) As raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$ são α e β. Encontre um trinômio de segundo grau cujos coeficientes envolvam somente S ou P e cujas raízes sejam os números $\alpha S+P$ e $\beta S+P$.

12. Use a teoria de equações de segundo grau desenvolvida nesta seção para calcular o valor da soma $(7 + 4\sqrt{3})^5 + (7 - 4\sqrt{3})^5$.

13. Sejam α e β as raízes da equação $x^2 - 5x + 1 = 0$. Calcule $\alpha^k + \beta^k$, para $1 \leq k \leq 5$ inteiro.

14. Se α é uma raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$, calcule os possíveis valores de $\alpha^5 - 5\alpha$.

15. Para quais valores inteiros de m a equação $x^2 + mx + 5 = 0$ tem raízes inteiras?

16. Mostre que, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$, a equação

$$\frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = \frac{1}{a^2}$$

possui exatamente duas raízes reais e distintas.

17. Resolva a equação $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ no conjunto dos números reais.

2.4 Equações polinomiais

Neste ponto é natural nos perguntarmos sobre como resolver a equação resultante da generalização natural das equações $ax + b = 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$, qual seja, a **equação polinomial de grau n**

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (2.11)$$

onde $n \geq 1$ é inteiro e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são reais dados[4], com $a_n \neq 0$. Observe que, quando $n = 1$ ou $n = 2$, voltamos respectivamente às equações de primeiro e segundo graus discutidas acima.

Nos contentaremos aqui em discutir alguns casos particulares e tecer alguns comentários que, acreditamos, serão úteis ao leitor, deixando um estudo mais sistemático das mesmas para o volume 6. Primeiramente, para equações polinomiais de graus $n = 3$ ou 4, fórmulas há, construídas em termos dos *coeficientes* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ da equação e que fornecem as raízes da mesma. Conforme ensina I. Stewart no capítulo 4 de seu interessantíssimo livro [45], tais fórmulas derivaram dos trabalhos dos matemáticos italianos Scipione del Ferro, Girolamo Cardano, Niccolò Tartaglia e Lodovico Ferrari. Porém, tais fórmulas são demasiadamente complexas para serem úteis e, portanto, não as discutiremos aqui. A fim de convencer o leitor da pertinência dessa afirmação, mencionamos que a fórmula de Cardano para a resolução da equação de terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ é a seguinte[5]:

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + (r - p^2)^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + (r - p^2)^3}} + p,$$

onde $p = -\frac{b}{3a}$, $q = p^3 + \frac{bc-3ad}{6a^2}$ e $r = \frac{c}{3a}$ (veja, contudo, os problemas 3, 9 e 10, página 64).

Para equações polinomiais (2.11) de grau $n \geq 5$, o matemático norueguês Niels H. Abel e o matemático francês Évariste Galois, ambos

[4]Estamos empregando aqui a notação de *sequências* de números reais. Para maiores detalhes, referimos o leitor ao capítulo 4.

[5]Cf. http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/courses/cubic.

Figura 2.3: Cardano

Figura 2.4: Tartaglia

do século XIX, provaram independentemente que não existe fórmula, construída em termos dos coeficientes da equação, que forneça as soluções reais da mesma. Bem entendido, não importa quão inteligente alguém seja; eles provaram que *é impossível* descobrir uma tal fórmula, simplesmente porque a mesma não existe!

Figura 2.5: A despeito de sua morte prematura, aos 21 anos, em um duelo, Galois é considerado um dos maiores matemáticos que já existiu. Seus trabalhos sobre equações polinomiais de grau $n \geq 5$ e teoria dos grupos constituíram a base do que hoje é conhecido como a Teoria de Galois, sub-ramo da Álgebra com aplicações em várias partes da matemática.

Alguns tipos particulares de equações de grau 4 ou 6 são suficientemente simples para merecerem certa atenção, especialmente porque substituições de variável apropriadas as reduzem imediatamente a equações de segundo grau. Examinemos primeiramente as equações **biquadradas**, i.e., equações do tipo

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \tag{2.12}$$

com $a \neq 0$. A substituição de variável $y = x^2$ para a equação biquadrada acima a transforma na equação de segundo grau $ay^2+by+c = 0$, para a qual já sabemos procurar as soluções reais. Portanto, para cada raiz real não-negativa $y = \alpha$ dessa última equação, resolvendo a equação $x^2 = \alpha$, obtemos o par de raízes reais $x = \pm\sqrt{\alpha}$ para a equação biquadrada original. Reciprocamente, se $x = \beta$ é uma raiz da equação biquadrada original, então é imediato que $y = \beta^2$ é uma raiz real não-negativa da equação de segundo grau $ay^2 + by + c = 0$. Provamos, portanto, o seguinte resultado.

Proposição 2.18. Dados números reais a, b e c, com $a \neq 0$, as raízes reais da equação biquadrada $ax^4+bx^2+c = 0$ são os números da forma $\pm\sqrt{\alpha}$, onde α é uma raiz real não-negativa da equação de segundo grau $ay^2 + by + c = 0$.

Note, contudo, que a fim de encontrar efetivamente as raízes reais de uma equação biquadrada, melhor que gravar o enunciado da proposição acima é lembrar a discussão do parágrafo anterior e, em especial, a fácil substituição $y = x^2$.

Exemplo 2.19. Encontre as raízes reais da equação biquadrada $x^4 + 5x^2 - 7 = 0$.

Solução. A substituição $y = x^2$ nos leva à equação de segundo grau $y^2 + 5y - 7 = 0$, para a qual $\Delta = 53$. Portanto, as soluções dessa última equação são $y = \frac{-5\pm\sqrt{53}}{2}$. Como $\frac{-5-\sqrt{53}}{2} < 0$, as raízes reais da equação biquadrada original são dadas pelas soluções da equação $x^2 = \frac{-5+\sqrt{53}}{2}$, i.e., são os números $\sqrt{\frac{-5+\sqrt{53}}{2}}$. ■

Para equações **bicúbicas**, i.e., equações do tipo

$$ax^6 + bx^3 + c = 0, \quad (2.13)$$

podemos fazer uma discussão análoga à acima, reduzindo novamente o problema da determinação das raízes reais da mesma à resolução de uma equação de segundo grau. Referimos o leitor ao problema 3, página 64, para a elaboração dos detalhes correspondentes.

Examinemos, por fim, **equações recíprocas** de grau 4, i.e., equações polinomiais de grau 4 da forma

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

onde a, b e c são reais dados, sendo $a \neq 0$. O nome *recíproca* provém da simetria dos coeficientes da equação (veja o problema 16, página 67).

Inicialmente, note que 0 não é raiz da equação acima, uma vez que $a \neq 0$. Portanto, um número real x é raiz da mesma se, e somente se, for também raiz de

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0, \quad (2.14)$$

equação obtida da equação original dividindo-se ambos os membros daquela por x^2. Escreva o primeiro membro da última equação acima como

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

A ideia agora é efetuar a substituição de variável $y = x + \frac{1}{x}$; note, contudo, que a implementação da mesma não é imediata, tendo-se primeiro de notar, conforme (2.1), que

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

Portanto, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, de maneira que resolver (2.14) equivale a resolver a equação de segundo grau

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0. \quad (2.15)$$

Há, entretanto, uma sutileza envolvida na discussão acima: decerto que toda raiz real $x = \alpha$ de (2.14) gera a raiz real $\beta = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ da equação $a(y^2-2)+by+c = 0$. Contudo, a recíproca não é verdadeira: nem toda raiz real $y = \beta$ dessa última equação gera raízes reais $x = \alpha$ da equação recíproca inicial. De fato, uma vez obtida uma raiz real $y = \beta$ de $a(y^2 - 2) + by + c = 0$, a fim de obter as possíveis raízes correspondentes da equação recíproca, temos de resolver a equação

$$x + \frac{1}{x} = \beta,$$

ou, equivalentemente, $x^2 - \beta x + 1 = 0$. Como o discriminante da mesma é

$$\Delta = \beta^2 - 4,$$

tal equação só terá raízes reais quando $\beta^2 - 4 \geq 0$, i.e., quando $|\beta| \geq 2$.

Assim como com equações biquadradas, para encontrar efetivamente as raízes reais de uma equação recíproca de grau 4 é mais prático seguir os passos que nos fizeram obter (2.15) a partir de (2.14).

Exemplo 2.20. Encontre as raízes reais da equação de grau 4

$$2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 2 = 0.$$

Solução. Dividindo ambos os membros por x^2 e reagrupando termos, obtemos a equação

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Fazendo a substituição $y = x + \frac{1}{x}$, segue que $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, de modo que a equação acima equivale à equação

$$2(y^2 - 2) + 5y + 6 = 0,$$

cujas raízes são $y = -2$ ou $y = -\frac{1}{2}$. Portanto, as raízes reais da equação original são as soluções das equações $x + \frac{1}{x} = -2$ ou $x +$

$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$. A primeira dessas equações equivale a $x^2 + 2x + 1 = 0$ e, portanto, tem duas raízes reais, ambas iguais a -1. A segunda equivale a $2x^2 + x + 2 = 0$, que tem discriminante $\Delta = -15 < 0$ e, portanto, não possui raízes reais. ■

Problemas – Seção 2.4

1. Mostre que, para todo real $a \neq 0$ dado, as equações

$$ax^3 - x^2 - x - (a+1) = 0 \quad \text{e} \quad ax^2 - x - (a+1) = 0$$

têm uma raiz comum.

2. (União Soviética.) Faça os itens a seguir:

(a) Para x real, escreva o número $x^3 - 3x^2 + 5x$ na forma

$$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d,$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

(b) Se x e y são reais tais que $x^3 - 3x^2 + 5x = 1$ e $y^3 - 3y^2 + 5y = 5$, calcule os possíveis valores de $x + y$.

3. * Elabore, para a equação bicúbica $ax^6 + bx^3 + c = 0$, uma discussão análoga àquela feita no texto para equações biquadradas e que nos levou à proposição 2.18.

4. Prove que uma equação bicúbica tem no máximo quatro raízes reais.

5. * Considere a equação polinomial de terceiro grau $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais dados, com $c \neq 0$. Se

$x = \alpha$ é uma raiz real (não nula) da mesma, prove que existem números reais β e γ tais que vale a fatoração

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x^2 + \beta x + \gamma).$$

Conclua, a partir daí, que a equação polinomial em questão tem no máximo três raízes reais. Nesse caso, sendo α, β e γ tais raízes, mostre também que:

(a) Se α, β e γ forem dois a dois distintos, então

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

(b) Se $\alpha = \beta \neq \gamma$, então

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^2(x - \gamma).$$

(c) Se $\alpha = \beta = \gamma$, então

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^3.$$

Este resultado generaliza a forma fatorada (2.10) de uma equação de segundo grau e é um caso particular do *algoritmo da divisão para polinômios*[6].

6. (a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

(b) Conclua que α é um número racional.

7. * Estabeleça as **relações entre coeficientes e raízes** para uma equação polinomial do terceiro grau: se os reais a_0, a_1, a_2 e a_3 ($a_3 \neq 0$) são tais que a equação polinomial de terceiro grau

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

[6]Para maiores detalhes acerca desse ponto, assim como para a generalização do resultado do problema 7, página 65, remetemos o leitor ao capítulo 4 do volume 6.

tem raízes reais x_1, x_2 e x_3, então

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} \end{cases} . \tag{2.16}$$

8. Sabendo que a equação $8x^3 - 6x + 1 = 0$ possui três raízes reais, α, β e γ digamos, calcule $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ e $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$.

9. Ainda em relação à equação polinomial de terceiro grau $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, prove que existe um número real d tal que a substituição de variável $x = y + d$ transforma tal equação numa equação da forma $y^3 + py + q = 0$, para certos números reais p e q.

10. Em relação à equação $x^3 - 11x + 16 = 0$, faça os seguintes itens:

    (a) Faça a substituição de variável $x = u + v$ e obtenha a equação equivalente, nas duas variáveis u e v, à equação dada.

    (b) Imponha que $uv = -\frac{1}{3}(-11)$ (i.e., $-\frac{1}{3}$ do coeficiente de x na equação dada) e conclua que a equação em duas variáveis do item (a) se transforma na equação bicúbica $u^6 + 16u^3 + \left(\frac{11}{3}\right)^3 = 0$.

    (c) Ache u e v, e conclua que uma raiz da equação do enunciado é
    $$\sqrt[3]{-8 + \frac{\sqrt{1191}}{9}} + \sqrt[3]{-8 - \frac{\sqrt{1191}}{9}}.$$

    Os itens acima descrevem, num exemplo prático, as ideias por trás da fórmula de Cardano.

11. * Se x é um real não nulo e tal que $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$, calcule os possíveis valores de $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

12. Se x é um real não nulo tal que $x + \frac{1}{x} = 4$, calcule o valor de $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

13. Se $x^2 - x - 1 = 0$, calcule o valor de
$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2.$$

14. (Cingapura.) Se $x^2 - 4x + 1 = 0$, calcule os possíveis valores da expressão
$$\frac{x^6 + \frac{1}{x^6} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 2}{x^3 + \frac{1}{x^3} - \left(x + \frac{1}{x}\right)^3}.$$

15. Resolva a equação recíproca $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$.

16. Dados números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$, com $a_n \neq 0$, a equação polinomial
$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$
é dita **recíproca** se $a_k = a_{n-k}$ para $0 \leq k \leq n$. Se α é uma raiz real dessa equação, prove que $\alpha \neq 0$ e que $\frac{1}{\alpha}$ também é raiz da mesma[7].

17. Faça os itens a seguir:

    (a) * Para um número real $x \neq 0$, obtenha uma expressão para $x^3 + \frac{1}{x^3}$ em função de $y = x + \frac{1}{x}$.

    (b) Use o item anterior para reduzir a equação recíproca $ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, de grau 6, a uma equação de polinomial de grau 3.

[7] O nome recíproca se justifica então pelo fato de que equações recíprocas têm raízes reais recíprocas em pares.

CAPÍTULO 3

Sistemas de Equações

Um **sistema de equações** é um conjunto

$$\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \\ \vdots \\ E_n = 0 \end{cases}$$

de equações a uma ou mais variáveis reais, as quais devem ser satisfeitas simultaneamente. Aqui, $E_1, \ldots, E_n$ representam expressões envolvendo uma ou mais variáveis reais.

Resolver um tal sistema significa encontrar todos os valores das variáveis que satisfaçam todas as equações do sistema ao mesmo tempo, e neste capítulo tencionamos desenvolver técnicas para resolver de maneira sistemática algumas classes importantes de sistemas de equações.

3.1 Sistemas lineares e eliminação

Os mais simples – e, para nossos propósitos, também os mais úteis – sistemas de equações são os **sistemas lineares** com duas equações e duas variáveis ou três equações e três variáveis, i.e., sistemas respectivamente de uma das formas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}, \tag{3.1}$$

onde os **coeficientes** a_i, b_i, c_i, d_i são números reais dados, não todos nulos, e x, y ou x, y, z são as incógnitas do sistema.

O método mais eficiente para a solução dos sistemas lineares acima é o algoritmo[1] de **escalonamento**, também conhecido como **eliminação Gaussiana**[2], o qual se baseia no resultado a seguir

Lema 3.1. Dadas expressões algébricas E e F nas variáveis x, y (ou x, y, z) e números reais a, b e c, os sistemas

$$\begin{cases} E = a \\ F = b \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} E + cF = a + cb \\ F = b \end{cases}$$

têm as mesmas soluções.

Prova. Provemos o lema no caso em que E e F são expressões algébricas nas variáveis x e y; o outro caso é totalmente análogo. Suponha que $x = x_0$ e $y = y_0$ resolvem o sistema da esquerda, i.e., que substituindo x por x_0 e y por y_0 em E e em F, as igualdades $E = a$ e $F = b$ se tornem verdadeiras, o que denotaremos escrevendo $E(x_0, y_0) = a$ e

[1]Um **algoritmo** é uma sequência finita de operações bem definidas que, uma vez realizadas, fornecem um resultado, também denominado a **saída** do algoritmo. Veremos mais exemplos interessantes de algoritmos nos volumes 4, 5 e 6 desta coleção.

[2]Após J. C. F. Gauss.

Figura 3.1: O matemático alemão dos séculos XVIII e XIX Johann Carl Friedrich Gauss é frequentemente considerado o maior matemático que já existiu. Nas várias áreas da Matemática em que trabalhou, como Teoria dos Números, Análise e Geometria Diferencial, há resultados ou métodos dos mais importantes e que hoje levam seu nome. Sugerimos ao leitor o livro [46] para uma interessante biografia de Gauss.

$F(x_0, y_0) = b$. Então a substituição de x por x_0 e y por y_0 em $E + cF$ nos dá

$$(E + cF)(x_0, y_0) = E(x_0, y_0) + cF(x_0, y_0) = a + cb,$$

de maneira que $x = x_0$ e $y = y_0$ também resolvem o sistema da direita. Reciprocamente, se $x = x_0$ e $y = y_0$ resolvem o sistema da direita, então, desde que $E = (E + cF) - cF$, um argumento análogo ao acima mostra que $x = x_0$ e $y = y_0$ resolvem o sistema da esquerda. Portanto, ambos os sistemas têm as mesmas soluções. ■

Voltando aos sistemas lineares (3.1), mostremos como uma aplicação apropriada do lema acima – e é precisamente nisto que consiste o *método do escalonamento* – leva a uma rápida solução dos mesmos. Comecemos pelo sistema da esquerda que, por simplicidade de nota-

ção, escreveremos na forma

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}.$$

Uma vez que ao menos um dos coeficientes a, b, c, d é não nulo, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a \neq 0$ (senão, basta reescrever o sistema como

$$\begin{cases} cx + dy &= f \\ ax + by &= e \end{cases}, \quad \begin{cases} by + ax &= e \\ dy + cx &= f \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} dy + cx &= f \\ by + ax &= e \end{cases},$$

conforme c, b ou d seja não nulo, e trocar a por um desses números na discussão a seguir).

Seja então $a \neq 0$ e $E = ax + by$, $F = cx + dy$. Trocando a equação $F = f$ pela equação

$$F - \frac{c}{a}E = f - \frac{c}{a}e,$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} E &= e \\ F - \frac{c}{a}E &= f - \frac{c}{a}e \end{cases},$$

e o lema 3.1 garante imediatamente que as soluções desse sistema coincidem com aquelas do sistema original, de modo que, para resolver aquele sistema, é suficiente resolver este último. Por outro lado, como

$$F - \frac{c}{a}E = (cx + dy) - \frac{c}{a}(ax + by) = \left(d - \frac{bc}{a}\right)y,$$

o sistema acima se reduz a

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ d'y &= f' \end{cases},$$

onde $d' = d - \frac{bc}{a}$ e $f' = f - \frac{c}{a}e$. Há agora três casos a considerar:

- Se $d' \neq 0$ (ou, equivalentemente, $ad - bc \neq 0$), então a segunda equação acima nos dá $y = \frac{f'}{d'}$, e a substituição desse resultado na primeira equação fornece $x = \frac{1}{a}(e - by) = \frac{1}{a}\left(e - \frac{bf'}{d'}\right)$. O sistema é então dito **possível determinado**, uma vez que possui uma única solução.

- Se $d' = 0$ (ou, equivalentemente, $ad - bc = 0$) e $f' \neq 0$, o sistema é *incompatível* ou **impossível**, uma vez que a segunda equação se resume a $0y = f'$, uma igualdade impossível para qualquer real y.

- Se $d' = f' = 0$, a segunda equação se resume à igualdade $0y = 0$, a qual é verdadeira para todo y real. Portanto, o sistema como um todo se resume à equação $ax + by = 0$, a qual possui uma infinidade de soluções (fazendo $y = t$, onde $t \in \mathbb{R}$, obtemos $x = -\frac{bt}{a}$), e o sistema é dito **possível indeterminado**.

Gostaríamos de frisar que, assim como no capítulo anterior, em exemplos práticos é muitas vezes mais fácil executar os passos do escalonamento do que relembrar quaisquer fórmulas. Como evidenciado pela discussão acima, os passos a que nos referimos se resumem a eliminar (daí o nome *eliminação Gaussiana*) a variável x da segunda equação, trocando essa última por ela mesma somada a um múltiplo apropriado da primeira equação.

Exemplo 3.2. Utilize o método do escalonamento para achar os valores reais de m para os quais o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + my &= 3 \\ mx + 2y &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

seja impossível, possível indeterminado ou possível determinado.

Solução. Trocando a segunda equação por ela mesma somada a $-\frac{m}{2}$ vezes a primeira, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x + my &= 3 \\ \left(2 - \frac{m^2}{2}\right) y &= \frac{3}{2}(1-m) \end{cases}.$$

Se $2 - \frac{m^2}{2} \neq 0$, o que é o mesmo que $m \neq \pm 2$, então a segunda equação acima nos dá $y = \frac{3(1-m)}{4-m^2}$, e daí a primeira equação fornece um único valor para x, qual seja

$$x = \frac{1}{2}(3 - my) = \frac{3(4-m)}{2(4-m^2)}.$$

Logo, o sistema é possível determinado para todo $m \neq \pm 2$.

Se $m = \pm 2$, então a segunda equação se reduz a $0y = \frac{3}{2}(1 \mp 2)$, a qual representa uma igualdade impossível em qualquer caso. Logo, o sistema é impossível em ambos os casos $m = 2$, $m = -2$. ■

Para uma interpretação *geométrica* do método do escalonamento para sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, veja o problema 6.2.5 do volume 2.

Voltemos agora nossa atenção ao sistema da direita em (3.1). A fim de analisá-lo, denote $E_i = a_i x + b_i y + c_i z$ para $1 \leq i \leq 3$, de modo que o mesmo se reduza a

$$\begin{cases} E_1 = d_1 \\ E_2 = d_2 \\ E_3 = d_3 \end{cases}.$$

Assim como para sistemas em duas variáveis, podemos supor que $a_1 \neq 0$ (os outros casos são análogos). Trocando as equações $E_2 = d_2$ e $E_3 = d_3$ respectivamente por

$$E_2 - \frac{a_2}{a_1}E_1 = d_2 - \frac{a_2}{a_1}d_1 \quad \text{e} \quad E_3 - \frac{a_3}{a_1}E_1 = d_3 - \frac{a_3}{a_1}d_1$$

(a fim de eliminar a variável x da segunda e da terceira equações), obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} E_1 &= d_1 \\ E_2 - \frac{a_2}{a_1}E_1 &= d_2 - \frac{a_2}{a_1}d_1 \\ E_3 - \frac{a_3}{a_1}E_1 &= d_3 - \frac{a_3}{a_1}d_1 \end{cases}.$$

Como

$$\begin{aligned} E_2 - \frac{a_2}{a_1}E_1 &= (a_2x + b_2y + c_2z) - \frac{a_2}{a_1}(a_1x + b_1y + c_1z) \\ &= \left(b_2 - \frac{a_2b_1}{a_1}\right) y + \left(c_2 - \frac{a_2c_1}{a_1}\right) z \\ &= b_2'y + c_2'z, \end{aligned}$$

e, analogamente, $E_3 - \frac{a_3}{a_1}E_1 = b_3'y + c_3'z$, basta então resolver o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2'y + c_2'z &= d_2' \\ b_3'y + c_3'z &= d_3' \end{cases},$$

onde $d_2' = d_2 - \frac{a_2}{a_1}d_1$ e $d_3' = d_3 - \frac{a_3}{a_1}d_1$.

Caso todos os números b_2', c_2', b_3', c_3' sejam iguais a 0, o sistema acima se reduz a

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ 0 &= d_2' \\ 0 &= d_3' \end{cases}.$$

Se $d_2' \neq 0$ ou $d_3' \neq 0$, o sistema é *impossível*; se $d_2' = d_3' = 0$, o sistema é *possível indeterminado*, uma vez que se resume à única equação $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, a qual possui obviamente uma infinidade de soluções.

Suponha, pois, que ao menos um dos números b_2', c_2', b_3' ou c_3' é não nulo, digamos $b_2' \neq 0$ (como antes, os outros casos podem ser

tratados analogamente). Então, aplicando o método do escalonamento ao sistema

$$\begin{cases} b_2'y + c_2'z &= d_2' \\ b_3'y + c_3'z &= d_3' \end{cases},$$

obtemos um sistema da forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2'y + c_2'z &= d_2' \\ c_3''z &= d_3'' \end{cases},$$

ainda equivalente ao sistema original. A discussão prossegue então como antes, concentrando nossa atenção na terceira equação $c_3''z = d_3''$. Também como antes, há três casos:

- Se $c_3'' \neq 0$, então a terceira equação acima nos dá um valor único para z, digamos $z = \gamma$; como $b_2' \neq 0$, a substituição desse valor na segunda equação fornece $y = \frac{1}{b_2'}(d_2' - c_2'z) = \frac{1}{b_2'}(d_2' - c_2'\gamma)$. Finalmente, como $a_1 \neq 0$, a substituição na primeira equação dos valores assim obtidos para y e z nos dá uma único valor para x, e concluímos daí que o sistema é *possível determinado.*

- Se $c_3'' = 0$ e $d_3'' \neq 0$, o sistema é *impossível*, uma vez que a terceira equação se resume a $0z = d_3''$.

- Se $c_3'' = d_3'' = 0$, então a terceira equação se resume à igualdade $0z = 0$, e o sistema como um todo se resume a

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2'y + c_2'z &= d_2' \end{cases}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= d_1 - c_1z \\ b_2'y &= d_2' - c_2'z \end{cases}.$$

Como a_1 e b_2' são não nulos, para cada valor real $z = \gamma$ o sistema correspondente

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= d_1 - c_1\gamma \\ b_2'y &= d_2' - c_2'\gamma \end{cases}$$

é possível e determinado; portanto, o sistema original em x, y, z é *possível indeterminado.*

Podemos resumir a discussão acima afirmando que o método de eliminação para sistemas lineares

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{cases}$$

consiste em executar a seu turno os três passos a seguir:

1º *Eliminar* a variável x da segunda e da terceira equações, trocando-as por elas mesmas somadas a múltiplos apropriados da primeira equação, obtendo um sistema da forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2'y + c_2'z &= d_2' \\ b_3'y + c_3'z &= d_3' \end{cases}.$$

2º *Eliminar* a variável y (caso $b_2' \neq 0$) da terceira equação, trocando-a por ela mesma somada a um múltiplo apropriado da segunda equação, obtendo um sistema da forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2'y + c_2'z &= d_2' \\ c_3''z &= d_3'' \end{cases}.$$

3º Analisar a equação $c_3''z = d_3''$ a fim de decidir se o sistema original é *possível determinado*, *possível indeterminado* ou *impossível.*

Como antes, mais vale guardar os passos genéricos acima que quaisquer detalhes da discussão anterior. Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 3.3. Encontre todos os valores reais de m para os quais o sistema de equações

$$\begin{cases} x+y-mz & = & -1 \\ 2x+my+z & = & 1 \\ mx+y-z & = & 2 \end{cases}$$

seja impossível.

Solução. Multiplicando a primeira equação respectivamente por 2 e por m, e subtraindo, também respectivamente, os resultados assim obtidos da segunda e terceira equações, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} x+y-mz & = & -1 \\ (m-2)y+(1+2m)z & = & 3 \\ (1-m)y-(1-m^2)z & = & 2+m \end{cases}.$$

Se $m=1$, a última equação se resume à igualdade impossível $0=3$, e o sistema original é impossível. Se $m\neq 1$, troque a segunda equação por ela mesma, somada a $-\frac{m-2}{1-m}$ vezes a terceira, obtendo o sistema equivalente

$$\begin{cases} x+y-mz & = & -1 \\ (m^2+m-1)z & = & \frac{-m^2-3m+7}{1-m} \\ (1-m)y-(1-m^2)z & = & 2+m \end{cases}.$$

Se $m^2+m-1=0$, i.e., $m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, o sistema é impossível, uma vez que $-m^2-3m+7\neq 0$ para tais valores de m; se $m\neq\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, então a segunda equação nos dá um único valor possível para z, o qual, substituído na terceira equação, fornece por sua vez um único valor para y; por fim, tais valores para y e z, substituídos na primeira equação, nos dão um único valor para x, e o sistema é possível determinado.

Logo, os valores procurados para m são $m=1$ ou $m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. ■

Finalizamos essa discussão inicial sobre sistemas lineares observando que o método de eliminação pode ser facilmente generalizado, de maneira a estudar o sistema linear com m equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}, \qquad (3.2)$$

onde os a_{ij} e b_i são reais dados, com nem todos os a_{ij} iguais a zero. Contudo, como não faremos uso sistemático de tais sistemas nestas notas, não desenvolveremos aqui a generalização correspondente. O leitor interessado pode consultar o Capítulo 1 de [26] para uma discussão geral acessível e completa de sistemas lineares. Um caso particular de interesse será examinado na seção 6.2 do volume 6 (cf. proposição 6.10).

Problemas – Seção 3.1

1. Suponha que, no sistema linear $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$, tenhamos a, b, c, d, e, $f\neq 0$. Prove que:

   (a) $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\Leftrightarrow$ o sistema é possível determinado.

   (b) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{e}{f}\Leftrightarrow$ o sistema é possível indeterminado.

   (c) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\neq\frac{e}{f}\Leftrightarrow$ o sistema é impossível.

2. Em relação ao sistema linear (3.2), faça os seguintes itens:

   (a) Se $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$, prove que o sistema sempre tem pelo menos uma solução.

(b) Se o sistema tiver pelo menos duas soluções, então ele terá uma infinidade de soluções.

3. Encontre todos os valores reais de α para os quais o sistema de equações

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 2 \end{cases}$$

seja impossível.

4. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} & = & 8 \\ \frac{3}{x} - \frac{5}{y} + \frac{2}{z} & = & -1 \\ \frac{7}{x} - \frac{6}{y} + \frac{3}{z} & = & 5 \end{cases}.$$

5. (OCM.) Encontre todas as soluções reais $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ do sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{98} + x_{99} + x_{100} & = & 0 \\ x_{99} + x_{100} + x_1 & = & 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 & = & 0 \end{cases}.$$

3.2 Miscelânea

Voltando-nos ao estudo de outros tipos relevantes de sistemas de equações, a proposição a seguir mostra como resolver **sistemas de segundo grau**.

Proposição 3.4. Dados números reais S e P, o sistema

$$\begin{cases} x + y & = & S \\ xy & = & P \end{cases} \tag{3.3}$$

possui soluções reais se e só se $S^2 \geq 4P$. Nesse caso, as soluções são dadas por $x = \alpha$, $y = \beta$ ou vice-versa, onde α e β são as raízes da equação de segundo grau $u^2 - Su + P = 0$.

Prova. Note primeiro que, sendo α e β as soluções da equação $u^2 - Su + P = 0$, sabemos pelas fórmulas de Viète (cf. item (b) da proposição 2.13) que $\alpha + \beta = S$ e $\alpha\beta = P$. Portanto, os pares $x = \alpha$, $y = \beta$ e $x = \beta$, $y = \alpha$ satisfazem o sistema do enunciado.

Reciprocamente, seja $x = x_0$, $y = y_0$ uma solução qualquer do sistema (3.3). Então a segunda equação nos dá $P = x_0y_0 = x_0(S - x_0)$, ou ainda $x_0^2 - Sx_0 + P = 0$. Portanto, x_0 é raiz da equação $u^2 - Su + P = 0$, donde segue que $x_0 = \alpha$ ou $x_0 = \beta$. Como $\alpha + \beta = S$, temos duas possibilidades:

- Se $x_0 = \alpha$, então a primeira equação do sistema nos dá $y_0 = S - x_0 = S - \alpha = \beta$.

- Se $x_0 = \beta$, então, novamente pela primeira equação do sistema, temos $y_0 = S - x_0 = S - \beta = \alpha$. ■

Os exemplos a seguir mostram como reduzir a solução de sistemas de equações mais complexos àquela de sistemas de um dos tipos mais simples discutidos até o momento.

Exemplo 3.5. Encontre todas as soluções reais do sistema de equações

$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x + y)(xy - 1) = 3 \end{cases}.$$

Solução. Escrevendo o primeiro membro da primeira equação como

$$\begin{aligned}(x^2+1)(y^2+1) &= x^2y^2+x^2+y^2+1\\ &= (xy)^2+[(x+y)^2-2xy]+1,\end{aligned}$$

chamando $x+y$ de a e xy de b, obtemos o sistema

$$\begin{cases} b^2+a^2-2b=9\\ a(b-1)=3\end{cases}.$$

Escrevendo agora

$$\begin{aligned}b^2+a^2-2b &= a^2+(b^2-2b+1)-1\\ &= a^2+(b-1)^2-1\end{aligned}$$

e fazendo a substituição $b-1=c$, obtemos finalmente o sistema

$$\begin{cases} a^2+c^2=10\\ ac=3\end{cases}.$$

Elevando a segunda equação ao quadrado e substituindo $c^2=10-a^2$ no resultado, obtemos a equação biquadrada $a^2(10-a^2)=9$, de maneira que $a^2=1$ ou 9 e, portanto, $a=\pm1$ ou ±3. Temos então as possibilidades

$$(a,c)=(1,3),(-1,-3),(3,1) \text{ ou } (-3,-1)$$

e, a partir daí,

$$(a,b)=(1,4),(-1,-2),(3,2) \text{ ou } (-3,0).$$

Por fim, para cada um de tais pares a,b, obtemos um sistema do tipo (3.3) em x,y. Resolvendo os 4 sistemas assim obtidos, chegamos às soluções reais

$$(x,y)=(1,-2),(-2,1),(1,2),(2,1),(0,-3) \text{ ou } (-3,0)$$

do sistema original. ■

Algumas equações aparentemente complicadas podem ser resolvidas facilmente se encontrarmos uma maneira de transformá-las em sistemas de equações. Não há procedimento geral que diga quando ou como isso pode ser feito, de modo que cada equação deve ser analisada separadamente. O exemplo a seguir mostra que um truque algébrico frequentemente útil nesse sentido é a introdução de novas variáveis.

Exemplo 3.6 (Israel). Encontre as soluções reais da equação

$$\sqrt[4]{13+x}+\sqrt[4]{4-x}=3.$$

Solução. Fazendo $a=\sqrt[4]{13+x}$ e $b=\sqrt[4]{4-x}=3$, obtemos $a+b=3$ e $a^4+b^4=(13+x)+(4-x)=17$, i.e., reduzimos o problema de resolver a equação dada àquele de resolver o sistema

$$\begin{cases} a+b &= 3\\ a^4+b^4 &= 17\end{cases}.$$

Utilizando duas vezes a fórmula (2.1) para o quadrado de uma soma, obtemos

$$\begin{aligned}17 &= a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\ &= [(a+b)^2-2ab]^2-2(ab)^2\\ &= (9-2ab)^2-2(ab)^2\\ &= 81-36ab+2(ab)^2,\end{aligned}$$

ou ainda

$$(ab)^2-18(ab)+32=0.$$

Resolvendo para ab a equação de segundo grau acima, obtemos $ab=2$ ou $ab=16$, e daí as duas seguintes possibilidades:

- $ab=2, a+b=3$: é imediato que, neste caso, $a=1$ e $b=2$ ou vice-versa. Se $a=1$, então $13+x=1$ e daí $x=-12$. Se $a=2$, então $13+x=16$ e daí $x=3$.

- $ab = 16, a + b = 3$: neste caso, a e b seriam as raízes da equação de segundo grau $u^2 - 3u + 16 = 0$. Porém, tal equação não admite raízes reais, uma vez que $\Delta = -55 < 0$. ■

Um procedimento relativamente comum para transformar uma equação em mais de uma incógnita em um sistema a ela equivalente faz uso do seguinte

Lema 3.7. Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são expressões envolvendo uma ou mais variáveis, então

$$E_1^2 + E_2^2 + \cdots + E_n^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \\ \vdots \\ E_n = 0 \end{cases}. \tag{3.4}$$

Prova. É uma fácil generalização da prova do corolário 1.5 e do problema 13, página 16. ■

Exemplo 3.8. Ache todas as soluções reais da equação

$$x^4y^2 + y^2 + 2 = 2y + 2x^2y.$$

Solução. Podemos reescrever a equação dada na forma

$$(x^4y^2 - 2x^2y + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0,$$

ou ainda

$$(x^2y - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0.$$

Assim, pelo lema anterior nossa equação equivale ao sistema

$$\begin{cases} x^2y - 1 &= 0 \\ y - 1 &= 0 \end{cases},$$

cujas soluções $y = 1$, $x = \pm 1$ obtemos sem nenhuma dificuldade. ■

Problemas – Seção 3.2

1. (IMO.) Ache todos os ternos números reais x, y e z, tais que a soma de qualquer um deles com o produto dos outros dois é sempre igual a 2.

2. Seja a uma constante real não nula. Encontre todos os reais x, y que resolvem o sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + x &= a + 1 \\ \frac{x}{x+y} &= a \end{cases}.$$

3. Resolva, para $x, y \in \mathbb{R}$, o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} + \frac{x-y}{xy} &= 5 \\ \frac{xy}{x+y} + \frac{xy}{x-y} &= \frac{5}{6} \end{cases}.$$

4. (IMO - adaptado.) Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c &= x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= x_3 \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= x_1 \end{cases},$$

com incógnitas x_1, x_2, x_3, onde a, b e c são reais dados, com $a \neq 0$. Se $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$, faça os seguintes itens:

   (a) Se $\Delta < 0$, então não há solução real.

   (b) Se $\Delta = 0$, então há exatamente uma solução real.

5. (Torneio das Cidades.) Encontre todas as soluções reais do sistema

$$\begin{cases} x^3 = 2y - 1 \\ y^3 = 2z - 1 \\ z^3 = 2x - 1 \end{cases}.$$

6. Resolva, para $x, y \in \mathbb{R}$, a equação $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3=0$.

7. (IMO.) Encontre todos os valores reais de a tais que o sistema (em x, y e z)
$$\begin{cases} x^2+y^2=4z \\ 3x+4y+z=a \end{cases}$$
tenha uma solução única.

8. (NMC.) Ache todos os x, y, z reais maiores que 1 tais que
$$x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1}=2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2}\right).$$

9. Ache todas as raízes reais da equação $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{11-x}=6$.

10. Ache todas as raízes reais da equação $\sqrt{5-\sqrt{5-x}}=x$.

11. (Canadá.) Ache todas as raízes reais da equação $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3$.

12. * Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$ e $F_1, F_2, \ldots, F_n$ expressões tais que $E_1 \leq F_1$, $E_2 \leq F_2$, ..., $E_n \leq F_n$. Prove que a equação
$$E_1+\cdots+E_n=F_1+\cdots+F_n$$
equivale ao sistema de equações
$$\begin{cases} E_1=F_1 \\ E_2=F_2 \\ \quad\vdots \\ E_n=F_n \end{cases}.$$

13. (Romênia.) Sejam a, b, c e d números reais dados, tais que
$$\begin{cases} a+b+c & \leq & 3d \\ b+c+d & \leq & 3a \\ c+d+a & \leq & 3b \\ d+a+b & \leq & 3c \end{cases}.$$
Prove que $a=b=c=d$.

14. (Romênia.) Ache todas as raízes reais da equação
$$\sqrt{4x^2-x^4-3}+\sqrt{4y^2-y^4}+\sqrt{4z^2-z^4+5}=6.$$

15. (Canadá.) Ache todas as soluções reais do sistema de equações
$$\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x^2}=y \\ \frac{4y^2}{1+4y^2}=z \\ \frac{4z^2}{1+4z^2}=x \end{cases}$$

16. Para $x>0$ real, prove que $x+\frac{4}{x}\geq 4$. Em seguida, utilize esse fato para resolver no conjunto dos reais positivos o sistema de equações
$$\begin{cases} x+\frac{4}{x} & = & \frac{5y}{4} \\ y+\frac{4}{z} & = & \frac{5z}{4} \\ z+\frac{4}{x} & = & \frac{5x}{4} \end{cases}.$$

17. (União Soviética - adaptado.) Encontre todas as soluções reais do sistema de equações
$$\begin{cases} 2x_2 & = & x_1+\frac{2}{x_1} \\ 2x_3 & = & x_2+\frac{2}{x_2} \\ 2x_1 & = & x_3+\frac{2}{x_3} \end{cases}.$$

CAPÍTULO 4

Sequências Elementares

Uma **sequência** (**infinita**) de números reais é uma *lista ordenada infinita* $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de números reais, i.e., uma lista infinita de números reais na qual especificamos quem é o primeiro número da lista, quem é o segundo, o terceiro, e assim por diante. É costume denotar uma sequência infinita como acima simplesmente por $(a_k)_{k\geq 1}$. Uma **sequência** (**finita**) de números reais é uma *lista ordenada finita* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reais, i.e., uma lista finita de números reais na qual, assim como com sequências infinitas, especificamos quem é o primeiro número da lista, quem é o segundo, o terceiro, etc. Também é costume denotar uma sequência finita como acima simplesmente por $(a_k)_{1\leq k\leq n}$. Em qualquer um dos casos acima, dizemos que a_k é o **kº termo**[1] da sequência.

[1]Lê-se *k-ésimo termo*.

Nosso propósito neste capítulo é estudar alguns tipos elementares de sequências que, pela frequência com que ocorrem na matemática elementar, merecem lugar de destaque. Ao longo desse processo, estabeleceremos também várias definições e propriedades válidas para sequências em geral. Sempre que não houver perigo de confusão, nos referiremos a sequências infinitas, deixando ao leitor a tarefa de adaptar os resultados e discussões porvir a sequências finitas.

4.1 Fórmulas posicionais e recorrências

Dizemos que a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ está definida por uma **fórmula posicional** se os valores $a_k \in \mathbb{R}$ forem dados por uma fórmula em k.

Exemplo 4.1. A sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ dos quadrados perfeitos é a sequência $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$. Portanto, temos $a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$ e, mais geralmente, $a_k = k^2$ para $k \geq 1$ inteiro.

Para sequências definidas por fórmulas posicionais, é frequentemente útil listar os termos da mesma a partir de zero, i.e., denotar a sequência por $(a_k)_{k\geq 0}$. Tal notação pode parecer estranha a princípio, uma vez que o primeiro termo da sequência seria a_0, o segundo seria a_1, etc. No entanto, vezes há em que, a fim de simplificar a fórmula posicional que define os valores dos termos da sequência, é desejável se fazer assim. Com tal notação alternativa, a sequência dos quadrados perfeitos, por exemplo, seria dada por $a_k = (k+1)^2$, para todo $k \geq 0$.

Uma alternativa a fórmulas posicionais para os termos de uma sequência é uma definição **recursiva**, ou **por recorrência**, dos mesmos. Tal procedimento consiste em especificar um ou mais termos iniciais da sequência, bem como uma *receita* para calcular certo termo em função dos (i.e., *recorrendo* aos) termos anteriores a ele.

Exemplo 4.2. *Considere a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ definida recursivamente*

por $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ e

$$a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}, \ \forall\ k \geq 3. \tag{4.1}$$

Fazendo $k = 3$ na relação acima, obtemos $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2\cdot 5 - 2 = 8$; fazendo agora $k = 4$, obtemos $a_4 = 2a_3 - a_2 = 2\cdot 8 - 5 = 11$, e assim por diante. A relação (4.1) acima é a **relação de recorrência**, *ou simplesmente a* **recorrência** *satisfeita pela sequência $(a_k)_{k\geq 1}$.*

É importante notar que só fomos capazes de calcular o valor do termo a_3 porque conhecíamos de antemão, além da recorrência (4.1), os valores dos dois primeiros termos, a_1 e a_2; conhecer somente o valor de a_1 não bastaria, uma vez que (4.1) calcula cada termo em função dos *dois* termos imediatamente anteriores. Por outro lado, se mudássemos os valores de a_1 e a_2 (mas mantivéssemos a recorrência acima), em geral mudaríamos os valores dos termos subsequentes da sequência (faça $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$ para a recorrência acima, por exemplo, e calcule o novo valor do terceiro termo).

Observe também que há outras formas equivalentes de escrevermos a recorrência anterior. De fato, chamando $k-2$ de j em (4.1), obtemos $k = j+2$, e daí

$$a_{j+2} = 2a_{j+1} - a_j, \ \forall\ j \geq 1$$

(uma vez que $k \geq 3$). Esse procedimento evidencia que o *nome* que damos ao **índice** de uma sequência (i.e., j, k, etc.) não é relevante para sua definição; poderíamos mesmo escrevê-la como

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k, \ \forall\ k \geq 1.$$

Uma pergunta natural a esta altura é a seguinte: se uma certa sequência está definida recursivamente, como podemos obter uma fórmula posicional para seus termos? Infelizmente tal pergunta não admite uma resposta simples. Discutiremos alguns exemplos simples neste capítulo, postergando uma análise mais profunda desse problema

para o capítulo 3 do volume 4, ou ainda para as seções 3.5 e 6.2 do volume 6.

Problemas – Seção 4.1

1. Calcule os quatro primeiros termos da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ definida por $a_1 = 1$ e $a_{k+1} = a_k^2 + a_k + 1$ para todo $k \geq 1$.

2. Escreva uma fórmula posicional para cada uma das sequências a seguir:

   (a) $(1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \ldots)$.

   (b) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \ldots)$.

   (c) $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \ldots)$.

3. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de reais positivos satisfazendo a recorrência $a_{k+1} = \frac{a_k}{3a_k+1}$, para $k \geq 1$. Se $(b_n)_{n\geq 1}$, é a sequência definida para $n \geq 1$ por $b_n = \frac{1}{a_n}$, obtenha uma recorrência satisfeita pela mesma.

4. Escreva uma recorrência para cada uma das sequências a seguir:

   (a) $(1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 183, \ldots)$.

   (b) $(1, 2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots)$.

4.2 Progressões

Comecemos nosso estudo de sequências elementares discutindo as *progressões aritméticas*.

Definição 4.3. Uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ de números reais é uma **progressão aritmética** (abreviamos **PA**) se existir um número real r tal que a recorrência

$$a_{k+1} = a_k + r \qquad (4.2)$$

seja satisfeita para todo inteiro $k \geq 1$.

Na definição acima, o número real r, diferença comum entre dois termos consecutivos quaisquer da PA, é denominado a **razão** da mesma. Note ademais que, para uma PA estar completamente determinada é necessário, além de sua razão r, conhecermos seu termo inicial a_1. Por exemplo, a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ dada por $a_1 = 2$ e $a_{k+1} = a_k + 3$ para $k \geq 1$ é uma PA de termo inicial 2 e razão 3, totalmente determinada pela recorrência que deve ser satisfeita e pelo valor 2 do termo inicial. No entanto, se soubéssemos apenas que $a_{k+1} = a_k + 3$ para todo $k \geq 1$, não teríamos uma só PA, pois não saberíamos como começá-la.

Exemplo 4.4. Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, prove que as sequências $(b_k)_{k\geq 1}$ e $(c_k)_{k\geq 1}$, definida por $b_k = a_{2k}$ e $c_k = a_{2k-1}$ para todo $k \geq 1$ inteiro, também são PA's, ademais de razões iguais a $2r$.

Prova. Analisemos a sequência $(b_k)_{k\geq 1}$ (o caso da sequência $(c_k)_{k\geq 1}$ é totalmente análogo), para o que basta mostrarmos que $b_{k+1} - b_k = 2r$ para todo $k \geq 1$. Pela definição de b_k e pelo fato de $(a_k)_{k\geq 1}$ ser uma PA de razão r, temos

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_k &= a_{2(k+1)} - a_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k} \\ &= (a_{2k+2} - a_{2k+1}) + (a_{2k+1} - a_{2k}) \\ &= r + r = 2r, \end{aligned}$$

conforme desejado. ■

Uma outra caracterização recursiva útil para PA's é a dada na proposição a seguir.

Proposição 4.5. Uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ de números reais é uma PA se e só se

$$a_{k+2} + a_k = 2a_{k+1}, \forall\, k \geq 1. \tag{4.3}$$

Prova. Por definição, a sequência é uma PA se e só se $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots$, i.e., se e só se, para todo $k \geq 1$ inteiro, tivermos $a_{k+2} - a_{k+1} = a_{k+1} - a_k$, que é uma maneira equivalente de escrevermos (4.3). ■

O próximo resultado ensina mais algumas propriedades interessantes e úteis de uma PA; em particular, ele ensina como obter uma fórmula posicional para os termos de uma PA. O leitor deve se esforçar para guardar as fórmulas nele constantes.

Proposição 4.6. Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, então

(*a*) $a_k = a_1 + (k-1)r$, para todo $k \geq 1$.

(*b*) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$, para todo $n \geq 1$.

Prova.
(a) O diagrama

$$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} a_{k-1} \xrightarrow{+r} a_k$$

deixa claro que, para chegar a a_k a partir de a_1, são necessários $k-1$ passos, onde cada passo se resume a somar r a um termo. Logo, para obter a_k temos de somar, ao todo, $(k-1)r$ a a_1, de maneira que $a_k = a_1 + (k-1)r$.

(b) A partir do diagrama

$$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} \cdots \xleftarrow{-r} a_{k-2} \xleftarrow{-r} a_{n-1} \xleftarrow{-r} a_n$$

concluímos que

$$a_1 + a_n = (a_2 - r) + (a_{n-1} + r) = a_2 + a_{n-1},$$
$$a_2 + a_{n-1} = (a_3 - r) + (a_{n-2} + r) = a_3 + a_{n-2},$$

etc. Logo, sendo $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, temos

$$\begin{aligned} 2S &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1) \\ &= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}} \\ &= n(a_1 + a_n), \end{aligned}$$

e a fórmula segue. ■

As fórmulas dos itens (*a*) e (*b*) da proposição acima são conhecidas respectivamente como a fórmula para o **termo geral** e a fórmula para a soma dos k primeiros termos de uma PA. Vejamos dois exemplos de aplicação das mesmas.

Exemplo 4.7. Calcule a soma dos k primeiros inteiros positivos ímpares.

Solução. Os inteiros positivos ímpares formam a PA $1, 3, 5, 7, \ldots$, de razão 2. O $k-$ésimo termo da mesma (o $k-$ésimo inteiro positivo ímpar!) é, pela fórmula para o termo geral de PA's, igual a $1 + (k-1)\cdot 2 = 2k-1$. Logo, a soma dos k primeiros inteiros positivos ímpares é, pelo item (*b*) da proposição anterior, igual a $\frac{k[1+(2k-1)]}{2} = k^2$. ■

Exemplo 4.8. Considere a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ dada por $a_1 = 1$ e

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + 2a_k}$$

para todo $k \geq 1$ inteiro. Calcule a_k em função de k.

Solução. É claro que os termos da sequência em questão são todos positivos, de maneira que podemos definir a sequência $(b_k)_{k\geq 1}$ pondo $b_k = \frac{1}{a_k}$. A recorrência do enunciado nos dá então

$$b_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1+2a_k}{a_k} = \frac{1}{a_k} + 2 = b_k + 2,$$

e daí $(b_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de termo inicial $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$ e razão 2. Portanto, tal PA coincide com aquela dos inteiros positivos ímpares, e o exemplo anterior nos dá $b_k = 2k-1$ para todo $k \geq 1$. Logo,

$$a_k = \frac{1}{b_k} = \frac{1}{2k-1}.$$ ■

Outra classe bastante útil de sequências é a formada pelas *progressões geométricas*, de acordo com a definição a seguir.

Definição 4.9. Uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ de números reais é uma **progressão geométrica** (abreviamos **PG**) se existir um número real q tal que a recorrência

$$a_{k+1} = q \cdot a_k \tag{4.4}$$

seja satisfeita para todo inteiro $k \geq 1$.

Assim como com PA's, o real q que aparece na definição de uma PG é a **razão** da mesma. Observe que, se $q = 0$, então $a_k = 0$ para todo $k > 1$. Por outro lado, se $q = 1$, então $a_k = a_1$ para todo $k \geq 1$. Também como com PA's, uma PG $(a_k)_{k\geq 1}$ só estará completamente determinada se dela conhecermos o primeiro termo a_1 e a razão q.

Exemplo 4.10. Fixado um real não nulo q, a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$, dada para $k \geq 1$ por $a_k = q^k$ (i.e., a sequência formada pelas potências de q com expoentes naturais) é uma PG de razão q. Se $q < 0$, o problema 17, página 17, garante que $a_k = q^k$ é positivo se e só se k for par; se $0 < q < 1$, o corolário 1.3 garante que $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 0$; se $q > 1$, novamente aquele resultado garante que $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$.

Uma outra caracterização recursiva útil para (quase todas as) PG's é a dada na proposição a seguir.

Proposição 4.11. Uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ de números reais não nulos é uma PG se e só se

$$a_{k+2}a_k = a_{k+1}^2, \forall\, k \geq 1. \tag{4.5}$$

Prova. Por definição, a sequência é uma PG (de razão q) se e só se

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = q,$$

i.e., se e só se, para todo $k \geq 1$ inteiro, tivermos $\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$, que é uma maneira equivalente de escrevermos (4.5). ■

Mantendo nosso paralelo com o desenvolvimento da teoria das PA's, o próximo resultado traz as fórmulas para o **termo geral** e para a soma dos k primeiros termos de uma PG. Também como com PA's, tais fórmulas devem ser guardadas para uso futuro.

Proposição 4.12. Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PG de razão q, então:

(*a*) $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$, para todo $k \geq 1$.

(*b*) Se $q \neq 1$, então $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}$, para todo $n \geq 1$.

Prova.
(a) A prova que apresentamos guarda estreito paralelo com aquela relativa ao termo geral de PA's (veja a prova do item (a) da proposição 4.6): o diagrama

$$a_1 \xrightarrow{\cdot q} a_2 \xrightarrow{\cdot q} a_3 \xrightarrow{\cdot q} \cdots \xrightarrow{\cdot q} a_{k-1} \xrightarrow{\cdot q} a_k$$

deixa claro que, para chegar a a_k a partir de a_1, são necessários $k-1$ passos, onde cada passo se resume a multiplicar um termo por q. Logo, temos de multiplicar a_1 por q um total de $k-1$ vezes, e daí

$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$.

(b) Denote por S_n a soma desejada, i.e., $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$; segue então de (4.4) que

$$\begin{aligned} qS_n &= q(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) \\ &= qa_1 + qa_2 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n \\ &= a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (q-1)S_n &= qS_n - S_n \\ &= (a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= (a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_{n+1} - a_1 - (a_2 + \cdots + a_n) \\ &= a_{n+1} - a_1, \end{aligned}$$

onde, na última passagem, cancelamos as duas ocorrências da parcela $a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Basta agora dividir ambos os membros da igualdade $(q-1)S = a_{n+1} - a_1$ por $q - 1$. ■

Exemplo 4.13. Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma PA de números naturais, de razão $r > 0$, e $(b_k)_{k\geq 1}$ uma PG de números reais não nulos, de razão q. Considere a sequência $(c_k)_{k\geq 1}$ tal que $c_k = b_{a_k}$ para todo $k \geq 1$ inteiro. Prove que a mesma é uma PG de razão q^r.

Prova. Basta mostrarmos que a razão entre dois termos consecutivos da sequência $(c_k)_{k\geq 1}$ é sempre igual a q^r, para o que utilizamos as fórmulas para o termo geral de PA's e PG's, assim como o resultado do problema 15, página 17:

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{b_{a_{k+1}}}{b_{a_k}} = \frac{b_1 q^{a_{k+1}-1}}{b_1 q^{a_k - 1}} = q^{a_{k+1} - a_k} = q^r. \quad ■$$

O propósito do exemplo a seguir é chamar atenção para o fato de que a ideia utilizada na prova do item (b) da proposição 4.12 é importante em si, devendo, portanto, ser guardada pelo leitor.

Exemplo 4.14. Calcule o valor da soma

$$2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 12 \cdot 3^2 + 17 \cdot 3^3 + \cdots + 497 \cdot 3^{99} + 502 \cdot 3^{100},$$

onde, da esquerda para a direita, a $k^{\underline{a}}$ parcela é igual ao produto do $k^{\underline{o}}$ termo da PA $2, 7, 12, \ldots, 502$ pelo $k^{\underline{o}}$ termo da PG $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{100}$.

Solução. Imitando o argumento usado na prova do item (b) da proposição 4.12, denotemos por S a soma pedida e calculemos $3S$ (utilizamos o fator 3 por se tratar da razão da PG envolvida!):

$$3S = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3^3 + 17 \cdot 3^4 + \cdots + 497 \cdot 3^{100} + 502 \cdot 3^{101}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2S &= 3S - S \\ &= (502 \cdot 3^{101} - 2) - 5(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{100}) \\ &= (502 \cdot 3^{101} - 2) - \frac{5}{2}(3^{101} - 3), \end{aligned}$$

onde, na última passagem, utilizamos a fórmula do item (b) da proposição 4.12. Efetuando os cálculos restantes, obtemos $S = \frac{1}{4}(999 \cdot 3^{101} + 11)$. ■

Problemas – Seção 4.2

1. Mostramos, abaixo, as quatro primeiras linhas de uma tabela infinita, formada por números naturais, onde, para $i > 1$, a

linha i começa à esquerda por i e tem dois números a mais que a linha $i-1$. Calcule a soma dos termos da linha n.

$$\begin{array}{lllllll} 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

2. Mostre que o número $11\ldots1$ (n algarismos 1) é igual a $\frac{10^n-1}{9}$.

3. Calcule a soma $1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$ em função de n.

4. Se $(a_k)_{k\geq1}$ é uma PA de razão r, prove que a sequência $(b_k)_{k\geq1}$, definida por $b_k = a_{k+1}^2 - a_k^2$, para todo $k \geq 1$, também é uma PA, e calcule sua razão em função de r.

5. Seja $(a_k)_{k\geq1}$ uma PA de razão não nula e p, q, u, v naturais dados. Prove que
$$a_p + a_q = a_u + a_v \Leftrightarrow p + q = u + v$$

6. Seja $(a_k)_{k\geq1}$ uma progressão aritmética de razão $r \neq 0$. Se $\frac{a_1}{r}$ for um inteiro não negativo, prove que a soma de dois termos quaisquer da PA também é um termo da PA.

7. Seja $(a_k)_{k\geq1}$ uma PA tal que $a_p = \alpha$ e $a_q = \beta$, com $p \neq q$. Calcule, em função de p, q, α, β, o termo a_{p+q}.

8. (Romênia.) Uma soma finita de inteiros ímpares e consecutivos (mais de um inteiro) é igual a 7^3. Encontre tais números.

9. A PA $(a_k)_{k\geq1}$ é formada por naturais dois a dois distintos. Prove que ela contém infinitos naturais compostos[2] dentre seus termos.

[2]Recordamos (cf. introdução ao capítulo 1) que um natural $n > 1$ é *composto* se pudermos escrever $n = ab$, para certos naturais $a, b > 1$.

10. (Canadá.) Seja a_n a soma dos n primeiros termos da sequência
$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots, r, r, r+1, r+1, \ldots.$$
   (a) Obtenha uma fórmula para a_n em função de n.
   (b) Prove que $a_{m+n} - a_{m-n} = mn$ para todos os m e n naturais tais que $m > n$.

11. (Canadá.) Mostre que os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não são todos termos de uma mesma PA.

12. Seja $(a_k)_{k\geq1}$ uma PG de razão q. Prove que, para $n \geq 1$ inteiro, temos
$$a_1a_2\ldots a_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

13. Calcule o valor da soma
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{99}{2^{50}},$$
na qual a $k^{\underline{a}}$ parcela da esquerda para a direita é igual ao quociente entre o $k^{\underline{o}}$ termo da PA $1, 3, 5, \ldots, 99$ e o $k^{\underline{o}}$ termo da PG $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{50}$.

14. (Macedônia.) Em uma PA não constante de números reais, o quociente entre o primeiro termo e a razão é um número irracional. Prove que não há três termos distintos dessa PA que estejam em PG.

15. A sequência $(a_k)_{k\geq1}$ é uma *progressão aritmético-geométrica* se, para cada inteiro $k \geq 1$, tivermos $a_k = b_kc_k$, onde as sequências $(b_k)_{k\geq1}$ e $(c_k)_{k\geq1}$ são respectivamente uma PA e uma PG. Calcule, em função de n, b_1, c_1 e das razões q, r respectivamente da PA e da PG, o valor da soma dos n primeiros termos de uma tal sequência $(a_k)_{k\geq1}$.

16. Calcule, em função de n, o $n^{\underline{o}}$ termo da sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ dada por $a_1 = 2$ e $a_{k+1} = 2a_k - 1$ para todo inteiro $k \geq 1$.

17. A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfaz $a_1 = 1$ e $a_{k+1} = 3a_k - 1$ para $k \geq 1$. Faça os seguintes itens:

    (a) Se $b_n = a_n - \frac{1}{2}$, prove que $b_{k+1} = 3b_k$ para $k \geq 1$.

    (b) Escreva os cinco primeiros termos de $(b_n)_{n\geq 1}$ e obtenha, em seguida, a fórmula posicional correspondente.

    (c) Obtenha uma fórmula posicional para a_n.

18. Prove que não existe uma PG que tenha os números 2, 3 e 5 como três de seus termos.

4.3 Recorrências lineares de ordens 2 e 3

Vimos, na seção anterior, que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma PG se, e somente se, satisfaz uma recorrência da forma (4.4), i.e., se, e somente se,

$$a_{k+1} - qa_k = 0, \tag{4.6}$$

para todo inteiro $k \geq 1$, onde q é uma constante real não nula. Dizemos que a recorrência (4.6) é **linear, de primeira ordem e com coeficientes constantes**, em alusão ao fato de que cada termo, a partir do segundo, é um *múltiplo constante* do termo imediatamente anterior.

Vimos, também, que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma PA se, e somente se, satisfaz a recorrência (4.3). Nesta seção, nosso primeiro propósito é estudar a classe mais geral das sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ que satisfazem recorrências do tipo

$$a_{k+2} + ra_{k+1} + sa_k = 0, \tag{4.7}$$

onde r e s são constantes reais dadas, não ambas nulas. Consoante o caso das PG's, uma tal recorrência é dita **linear, de segunda ordem e com coeficientes constantes**, em alusão ao fato de que cada termo, a partir do terceiro, é uma *combinação linear com coeficientes constantes* (i.e., uma soma de múltiplos constantes) dos dois termos imediatamente anteriores.

Para sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfazendo recorrências como (4.7), o teorema 4.16 a seguir ensina como calcular a_n em função de n. Antes de apresentá-lo, ilustremos a ideia por trás de sua prova com um exemplo algébrico em que r e s têm valores dados.

Exemplo 4.15. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por $a_1 = 1$, $a_2 = 7$ e, para $k \geq 1$ inteiro, $a_{k+2} = 8a_{k+1} - 15a_k$. Calcule a_n em função de n.

Solução. Para $k \geq 1$ inteiro, temos

$$a_{k+2} - 3a_{k+1} = 5(a_{k+1} - 3a_k).$$

Assim, a sequência $(b_k)_{k\geq 1}$ tal que $b_k = a_{k+1} - 3a_k$ é uma PG de razão 5 e termo inicial $b_1 = a_2 - 3a_1 = 7 - 3 = 4$, de modo que $b_k = b_1 \cdot 5^{k-1} = 4 \cdot 5^{k-1}$. Analogamente, para $k \geq 1$ inteiro temos

$$a_{k+2} - 5a_{k+1} = 3(a_{k+1} - 5a_k),$$

de modo que a sequência $(c_k)_{k\geq 1}$ dada por $c_k = a_{k+1} - 5a_k$ é uma PG de razão 3. Uma vez que seu termo inicial é $c_1 = a_2 - 5a_1 = 7 - 5 = 2$, segue que $c_k = c_1 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^{k-1}$. Portanto, para todo inteiro $k \geq 1$ temos o sistema de equações

$$\begin{cases} a_{k+1} - 3a_k = 4 \cdot 5^{k-1} \\ a_{k+1} - 5a_k = 2 \cdot 3^{k-1} \end{cases},$$

e, subtraindo membro a membro as relações acima, obtemos

$$a_k = 2 \cdot 5^{k-1} - 3^{k-1}, \ \forall\, k \geq 1. \qquad \blacksquare$$

O procedimento exposto no exemplo acima pode ser facilmente generalizado, conforme ensina o resultado a seguir.

Teorema 4.16. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que, para todo $k \geq 1$ inteiro, tenhamos

$$a_{k+2} + ra_{k+1} + sa_k = 0,$$

onde r e s são constantes reais dadas, não ambas nulas. Se a equação $x^2 + rx + s = 0$ tiver raízes reais α e β, então existem constantes reais A e B, determinadas pelos valores de a_1 e a_2, tais que:

(a) Se $\alpha \neq \beta$, então $a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

(b) Se $\alpha = \beta$, então $a_n = (A + B(n-1))\alpha^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Prova. Lembre que $\alpha + \beta = -r$ e $\alpha\beta = s$. Assim, (4.7) pode ser reescrita como

$$a_{k+2} - (\alpha + \beta)a_{k+1} + (\alpha\beta)a_k = 0,$$

ou ainda, para todo inteiro $k \geq 1$,

$$\begin{cases} a_{k+2} - \alpha a_{k+1} = \beta(a_{k+1} - \alpha a_k) \\ a_{k+2} - \beta a_{k+1} = \alpha(a_{k+1} - \beta a_k) \end{cases}.$$

Definindo $b_k = a_{k+1} - \alpha a_k$ e $c_k = a_{k+1} - \beta a_k$, segue das relações acima que $(b_k)_{k\geq 1}$ e $(c_k)_{k\geq 1}$ são PG's de razões respectivamente iguais a β e α, e termos iniciais respectivamente iguais a $b_1 = a_2 - \alpha a_1$, $c_1 = a_2 - \beta a_1$. Portanto, a fórmula para o termo geral de uma PG nos dá

$$b_k = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{k-1} \quad \text{e} \quad c_k = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{k-1},$$

ou seja,

$$\begin{cases} a_{k+1} - \alpha a_k = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{k-1} \\ a_{k+1} - \beta a_k = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{k-1} \end{cases}. \tag{4.8}$$

Consideremos primeiro o caso $\alpha \neq \beta$. Subtraindo membro a membro as relações acima, segue que

$$a_k = \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta}\alpha^{k-1} - \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha - \beta}\beta^{k-1};$$

denotando

$$A = \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta} \quad \text{e} \quad B = -\frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha - \beta}$$

obtemos a fórmula do item (a).

Caso seja $\alpha = \beta$, as duas relações (4.8) são iguais, de modo que não temos informação suficiente para calcular a_k. Usamos, então, o seguinte artifício: é imediato verificar que as sequências $u_k = \alpha^{k-1}$ e $v_k = (k-1)\alpha^{k-1}$ (o mesmo α que antes, raiz da equação $x^2+rx+s = 0$) satisfazem as recorrências

$$\begin{cases} u_{k+2} + ru_{k+1} + su_k = 0 \\ v_{k+2} + rv_{k+1} + sv_k = 0 \end{cases}$$

(cf. problema 4); portanto, fixados $A, B \in \mathbb{C}$, a sequência $z_k = Au_k + Bv_k$ satisfaz a recorrência

$$z_{k+2} + rz_{k+1} + sz_k = 0$$

(cf. problema 5). Assim, a ideia é procurarmos números reais A e B tais que, para todo inteiro $k \geq 1$, tenhamos $a_k = z_k$. Como tais sequências satisfazem relações de recorrência idênticas, o problema 9, página 136, garante ser suficiente acharmos números reais A e B tais que $a_1 = z_1$ e $a_2 = z_2$, ou seja, tais que

$$\begin{cases} a_1 = A \\ a_2 = (A + B)\alpha \end{cases};$$

mas isso pode claramente ser feito, uma vez que $\alpha = -\frac{r}{2} \neq 0$. ■

Na prática, utilizamos as fórmulas do teorema anterior do seguinte modo: dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$a_{k+2} + ra_{k+1} + sa_k = 0$$

para todo inteiro $k \geq 1$, onde r, s são constantes reais dadas e $r \neq 0$, calculamos as raízes reais da equação

$$x^2 + rx + s = 0,$$

denominada a **equação característica** da recorrência (4.7). Observamos em seguida se $\alpha \neq \beta$ ou $\alpha = \beta$ e usamos, conforme o caso, as fórmulas dos itens (a) ou (b) da proposição anterior. Para encontrar as constantes A e B no caso $\alpha \neq \beta$, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} a_1 &= A + B \\ a_2 &= A\alpha + B\beta \end{cases};$$

no caso $\alpha = \beta$, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} a_1 &= A \\ a_2 &= (A + B)\alpha \end{cases}.$$

Em ambos os casos acima, as equações dos sistemas são obtidas fazendo k respectivamente igual a 1 e 2 nas fórmulas dos itens (a) ou (b).

Exemplo 4.17. Executemos o programa acima para obter uma fórmula posicional para obter uma fórmula posicional para o $n^{\underline{o}}$ termo da célebre **sequência de Fibonacci**[3], i.e., a sequência $(F_n)_{n\geq 1}$, dada por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \tag{4.9}$$

[3] A sequência de Fibonacci desempenha um papel relevante em Combinatória, conforme veremos no volume 4.

para todo inteiro $k \geq 1$. Mais precisamente, mostremos que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}, \ \forall n \geq 1. \tag{4.10}$$

Solução. A recorrência da sequência de Fibonacci pode ser escrita como $F_{k+2} - F_{k+1} - F_k = 0$ e, portanto, tem equação característica $x^2 - x - 1 = 0$. Sendo $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ as raízes da mesma, segue do item (a) do teorema 4.16 que

$$F_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1},$$

onde A e B são tais que $F_1 = F_2 = 1$ (lembre que esses são os valores dos dois termos iniciais da sequência de Fibonacci). Fazendo sucessivamente $n = 1$ e $n = 2$ na fórmula acima para F_n, obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + B &= 1 \\ \alpha A + \beta B &= 1 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação por α e subtraindo a segunda equação do resultado, obtemos $(\alpha - \beta)B = \alpha - 1$. Mas, como $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, podemos escrever essa última equação como $\sqrt{5}B = -\beta$, donde $B = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$. Analogamente, multiplicando a primeira equação por β e subtraindo o resultado da segunda equação, obtemos $A = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$, de maneira que

$$F_n = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \cdot \alpha^{n-1} - \frac{\beta}{\sqrt{5}} \cdot \beta^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n),$$

justificando a fórmula (4.10). ■

O exemplo a seguir mostra outra situação em que o teorema 4.16 pode ser aplicado, ainda que tal aplicação não seja imediata.

Exemplo 4.18. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais satisfazendo a recorrência $a_{k+1} = ra_k + s$ para todo $k \geq 1$, onde r e s são

constantes reais dadas, com $r \neq 0, 1$ (não precisamos considerar $r = 1$, uma vez que nesse caso $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma PA). Para todo $k \geq 1$, temos $a_{k+2} - ra_{k+1} = s = a_{k+1} - ra_k$ ou, ainda,

$$a_{k+2} - (r+1)a_{k+1} + ra_k = 0,$$

uma recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes. A equação característica correspondente,

$$x^2 - (r+1)x + r = 0,$$

tem raízes r e 1, de maneira que $a_n = Ar^{n-1} + B$. Lembrando que $a_2 = ra_1 + s$, as constantes A e B podem ser obtidas resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} A + B = a_1 \\ Ar + B = ra_1 + s \end{cases};$$

portanto, $A = a_1$ e $B = s$, de sorte que

$$a_n = a_1 r^{n-1} + s.$$

Voltemo-nos, agora, às recorrências lineares de terceira ordem e com coeficientes constantes. Como o leitor deve estar imaginando, nesse caso temos uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, que satisfaz uma relação de recorrência da forma

$$a_{k+3} + ra_{k+2} + sa_{k+1} + ta_k = 0, \qquad (4.11)$$

para todo inteiro $k \geq 1$, onde r, s e t são constantes reais dadas, não todas nulas.

Analogamente ao caso de recorrências lineares de segunda ordem, definimos a **equação característica** de (4.11) como a equação polinomial de terceiro grau

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0.$$

De acordo com o problema 9, página 66, uma tal equação admite, no máximo, três raízes reais. No que segue, assumiremos que ela possui, de fato, três raízes reais, digamos α, β e γ. Temos, então, o seguinte resultado.

Teorema 4.19. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que, para todo $k \geq 1$ inteiro, tenhamos

$$a_{k+3} + ra_{k+2} + sa_{k+1} + ta_k = 0,$$

onde r, s e t são constantes reais dadas, não todas nulas. Se a equação característica $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ tiver raízes reais α, β e γ, então existem constantes reais A, B e C, determinadas pelos valores de a_1, a_2 e a_3, tais que:

(*a*) Se $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, então $a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

(*b*) Se $\alpha = \beta \neq \gamma$, então $a_n = (A + B(n-1))\alpha^{n-1} + C\gamma^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

(*c*) Se $\alpha = \beta = \gamma$, então $a_n = (A + B(n-1) + C(n-1)^2)\alpha^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

Prova. Façamos um esboço da prova, deixando os detalhes a cargo do leitor (cf. problema 6).

Seja $(b_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por $b_n = \alpha^{n-1}$, para todo $n \geq 1$. Como $\alpha^3 + r\alpha^2 + s\alpha + t = 0$, temos também $\alpha^{k+2} + r\alpha^{k+1} + s\alpha^k + t\alpha^{k-1} = 0$ ou, ainda,

$$b_{k+3} + rb_{k+2} + sb_{k+1} + tb_k = 0,$$

para todo $k \geq 1$. Portanto, a sequência $(b_n)_{n\geq 1}$ satisfaz a mesma recorrência que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Analogamente, as sequências $(c_n)_{n\geq 1}$ e $(d_n)_{n\geq 1}$, dadas para $n \geq 1$ por $c_n = \beta^{n-1}$ e $d_n = \gamma^{n-1}$, satisfazem a mesma recorrência que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$.

Consideremos, agora, os casos (a), (b) e (c) separadamente:

(a) Para todos $A, B, C \in \mathbb{R}$, a sequência $(u_n)_{n\geq 1}$ tal que $u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1}$ para $n \geq 1$ satisfaz a mesma recorrência que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Por outro lado, como $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, podemos escolher A, B e C de tal forma que $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$ e $u_3 = a_3$. Portanto, apelando novamente para o resultado do problema 9, página 136, concluímos que $u_n = a_n$, para todo $n \geq 1$.

(b) O resultado do problema 9, página 66, fornece

$$x^3 + rx^2 + sx + t = (x-\alpha)^2(x-\gamma).$$

A partir daí, é fácil mostrar que a sequência $b_n = (n-1)\alpha^{n-1}$ também satisfaz a mesma recorrência que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Como no item (a), para todos $A, B, C \in \mathbb{R}$, a sequência $(u_n)_{n\geq 1}$ tal que $u_n = (A + B(n-1))\alpha^{n-1} + C\gamma^{n-1}$ para $n \geq 1$ satisfaz a mesma recorrência que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Também podemos escolher A, B e C de tal forma que $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$ e $u_3 = a_3$, de modo que, invocando uma vez mais para o resultado do problema 9, página 136, concluímos que $u_n = a_n$, para todo $n \geq 1$.

(c) O resultado do problema 9, página 66, fornece

$$x^3 + rx^2 + sx + t = (x-\alpha)^3.$$

É, agora, fácil mostrar que as sequências $b_n = (n-1)\alpha^{n-1}$ e $c_n = (n-1)^2\alpha^{n-1}$ satisfazem a mesma recorrência que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, de sorte que o mesmo sucede com $u_n = (A + B(n-1) + C(n-1)^2)\alpha^{n-1}$. O resto é como nos itens (a) e (b). ■

Exemplo 4.20. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$, a sequência tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 14$ e

$$a_{k+3} - 6a_{k+2} + 12a_{k+1} - 8a_k = 0,$$

para todo inteiro $k \geq 1$. Explicite a_n em função de n.

Solução. A recorrência em questão tem equação característica $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$. Mas, como $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$, temos, pelo item (c) do teorema anterior, que

$$a_n = (A + B(n-1) + C(n-1)^2) \cdot 2^{n-1},$$

onde A, B e C são constantes apropriadas. Agora, as condições iniciais fornecem o sistema de equações

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B + C = 2 \\ A + 2B + 4C = 7/2 \end{cases},$$

cuja solução é $A = 1$, $B = 3/4$, $C = 1/4$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{3}{4}(n-1) + \frac{1}{4}(n-1)^2\right) \cdot 2^{n-1} \\ &= (n^2 + n + 2) \cdot 2^{n-3}. \end{aligned}$$ ■

Terminamos esta seção observando que a análise de sequências definidas por recorrências lineares, de coeficientes constantes e ordens quaisquer, será levada a termo no capítulo 7 do volume 6.

Problemas – Seção 4.3

1. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e, para todo inteiro positivo k, $a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k$. Calcule a_n em função de n.

2. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a seqüência dada por $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ e, para $k \geq 1$ inteiro, $a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k$. Prove que $a_n = 2^n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Seja $(a_n)_{n\geq1}$ a sequência dada por $a_1 = 3$ e $a_{k+1} = 2a_k - 1$ para $k \geq 1$. Calcule a_n em função de n.

4. * Se a equação $x^2 + rx + s = 0$ tem duas raízes iguais a α, prove que as sequências $u_k = \alpha^{k-1}$ e $v_k = (k-1)\alpha^{k-1}$ satisfazem as relações de recorrência

$$\begin{cases} u_{k+2} + ru_{k+1} + su_k &= 0 \\ v_{k+2} + rv_{k+1} + sv_k &= 0 \end{cases}.$$

5. * Se as sequências $(u_n)_{n\geq1}$ e $(v_n)_{n\geq1}$ satisfazem as recorrências de segunda ordem $u_{k+2}+ru_{k+1}+su_k = 0$ e $v_{k+2}+rv_{k+1}+sv_k = 0$ para todo $k \geq 1$, prove que a sequência $(z_n)_{n\geq1}$ dada para $k \geq 1$ por $z_k = Au_k + Bv_k$ (onde A e B são constantes reais) satisfaz uma recorrência análoga, $z_{k+2} + rz_{k+1} + sz_k = 0$.

6. * Complete a prova do teorema 4.19.

7. Em relação à sequência $(a_n)_{n\geq1}$, tal que $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n})$$

para $n \geq 1$,faça os seguintes itens:

(a) Se $b_n = \sqrt{1 + 24a_n}$, prove que $2b_{n+1} = b_n + 3$ para todo $n \geq 1$.

(b) Mostre que $b_n = 3 + \frac{4}{2^n}$ para todo $n \geq 1$.

(c) Conclua que, para todo $n \geq 1$, temos

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

4.4 Somatórios e produtórios

Introduzimos agora as notações $\sum$ (lê-se **sigma**) para somas e $\prod$ (lê-se **pi**) para produtos, as quais se revelam muito úteis no contexto de sequências.

Definição 4.21. Dada uma sequência $(a_k)_{k\geq1}$, escrevemos $\sum_{j=1}^{n} a_j$ para denotar a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, e lemos o **somatório dos** a_j, **para** $1 \leq j \leq n$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \begin{cases} a_1 & , \text{ se } n = 1 \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n & , \text{ se } n > 1 \end{cases}.$$

Como caso particular da definição acima, se $(a_k)_{k\geq1}$ for uma sequência **constante**, digamos com $a_k = c$ para todo $k \geq 1$, teremos claramente

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} c = nc.$$

Uma das utilidades da notação $\sum$ se deve ao fato dela tornar fácil a manipulação de somas com grande número de parcelas, ainda mais quando cada parcela for, ela mesma, uma soma. Por exemplo, dadas sequências $(a_k)_{k\geq1}$ e $(b_k)_{k\geq1}$, a associatividade e a comutatividade da adição de reais garantem que

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\pm(b_1+b_2+\cdots+b_n) = (a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n);$$

com o uso da notação $\sum$, essa igualdade se escreve de forma bem mais compacta, como

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \pm \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}(a_j \pm b_j). \tag{4.12}$$

Por outro lado, dado $c \in \mathbb{R}$, a distributividade da multiplicação em relação à adição nos dá

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n,$$

igualdade que se escreve, com a notação $\sum$, como

$$c\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} ca_j. \tag{4.13}$$

Em outras palavras, é possível *partir um somatório de somas em dois outros somatórios*, bem como *pôr uma constante em evidência em um somatório.*

Exemplo 4.22. Calcule, em função de $n \in \mathbb{N}$, o valor da soma $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$.

Solução. Aplicando as propriedades acima, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k+1) &= \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n \\ &= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n = n^2 + 2n,\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue da fórmula do item (b) da proposição 4.6. ■

A notação $\sum$ é particularmente útil para fazermos cancelamentos em somas. Mais precisamente, dada uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$, efetuando os cancelamentos intermediários na soma

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$$

obtemos $a_n - a_1$ como resultado. Com o uso da notação $\sum$, podemos escrever a igualdade acima como

$$\sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1} - a_j) = a_n - a_1. \tag{4.14}$$

Uma fórmula equivalente (obtida da fórmula acima escrevendo $n+1$ no lugar de n), que será por vezes utilizada no lugar de (4.14), é

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{j+1} - a_j) = a_{n+1} - a_1. \tag{4.15}$$

Uma qualquer das fórmulas (4.14) ou (4.15) é conhecida como a fórmula para uma **soma telescópica**. A ideia por trás do nome é a seguinte: assim como olhando num telescópio *encurtamos* a imensa distância de um corpo celeste a nossos olhos, a fórmula acima *encurta* o caminho entre uma soma inicial de muitas parcelas e o cálculo do resultado da mesma.

A fórmula da soma telescópica é uma das principais vantagens da notação $\sum$. Justifiquemos essa afirmação examinando dois exemplos interessantes.

Exemplo 4.23. Deduza a fórmula para o termo geral de uma PA utilizando a fórmula da soma telescópica.

Solução. Se a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, então (4.15) fornece

$$a_n - a_1 = \sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=1}^{n-1} r = (n-1)r,$$

donde $a_n = a_1 + (n-1)r$. ■

Para o próximo exemplo, dizemos que uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma **PA de segunda ordem** se a sequência $(b_k)_{k\geq 1}$, dada para $k \geq 1$ por $b_k = a_{k+1} - a_k$, for uma PA não constante. Para construir uma PA de segunda ordem $(a_k)_{k\geq 1}$, podemos começar com uma PA não constante, por exemplo

$$(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \ldots).$$

Em seguida, estipulamos o termo inicial da PA de segunda ordem, digamos $a_1 = 2$ e, a partir daí, calculamos $a_2, a_3, \ldots$ a partir das

relações $a_2 - a_1 = 3$, $a_3 - a_2 = 7$, $a_4 - a_3 = 11$, etc. Obtemos assim, para a PA dada acima, a PA de segunda ordem

$$(2, 5, 12, 23, 38, 57, 70, \ldots).$$

Vemos a partir desse exemplo que uma PA de segunda ordem só fica totalmente determinada se conhecermos seus três primeiros termos. De fato, só sabendo seus três primeiros termos é que teremos os dois primeiros termos da PA não constante formada pelas diferenças.

Exemplo 4.24. Dada uma PA de segunda ordem $(a_k)_{k\geq 1}$, prove que

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1)(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}, \tag{4.16}$$

onde $r = a_3 - 2a_2 + a_1$ é a razão da PA não constante formada pelas diferenças entre termos consecutivos de $(a_k)_{k\geq 1}$.

Solução. Denote $b_k = a_{k+1} - a_k$ para todo $k \geq 1$. As fórmulas da soma telescópica e para a soma dos termos de uma PA finita nos dão

$$a_n - a_1 = \sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j = \frac{(n-1)(b_1 + b_{n-1})}{2}.$$

Por outro lado, aplicando a fórmula para o termo geral de uma PA, obtemos

$$b_{n-1} = b_1 + (n-2)r = (a_2 - a_1) + (n-2)r,$$

e daí

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \frac{(n-1)(b_1 + b_{n-1})}{2} \\ &= a_1 + \frac{(n-1)(2(a_2 - a_1) + (n-2)r)}{2} \\ &= a_1 + (n-1)(a_2 - a_1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}. \end{aligned}$$

Por fim, observe que

$$r = b_2 - b_1 = (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) = a_3 - 2a_2 + a_1.$$ ■

Em que pesem os exemplos acima, se quisermos utilizar a fórmula para a soma telescópica para calcular somas $\sum_{j=1}^{n} b_j$ de termos de uma sequência dada $(b_k)_{k\geq 1}$, teremos primeiro de conseguir *enxergar* as parcelas b_j como diferenças $a_{j+1} - a_j$ entre termos consecutivos de uma mesma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$. A dificuldade nesse raciocínio é que não sabemos de antemão quem é a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.25. Considere a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ dada por $a_1 = 1$ e

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + ka_k}$$

para todo inteiro positivo k. Calcule a_n em função de n.

Solução. Como os termos da sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ são todos positivos (por quê?), podemos definir a sequência $(b_k)_{k\geq 1}$ pondo $b_k = \frac{1}{a_k}$. A relação do enunciado nos dá então

$$b_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1 + ka_k}{a_k} = \frac{1}{a_k} + k = b_k + k,$$

de maneira que, pela fórmula para somas telescópicas,

$$b_n - b_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2},$$

onde na última igualdade usamos a fórmula para a soma dos termos de uma PA finita. Portanto,

$$b_n = b_1 + \frac{n(n-1)}{2} = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2},$$

e daí $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{n^2 - n + 2}$. ■

Para o próximo exemplo defina, para cada inteiro positivo n, o **fatorial** de n, denotado $n!$, como o produto de todos os naturais desde 1 até n (por convenção, $1! = 1$), i.e., $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, etc. Veja que, em geral, temos $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$.

Exemplo 4.26 (Canadá). Calcule, em função de n, o valor da soma $\sum_{j=1}^{n} j(j!)$.

Solução. A fim de utilizar a fórmula da soma telescópica, temos primeiro de conseguir escrever $j(j!)$ como uma diferença $a_{j+1} - a_j$, de termos consecutivos de uma mesma sequência. Fazemos isso observando que

$$j(j!) = [(j+1) - 1]j! = (j+1) \cdot j! - j! = (j+1)! - j!.$$

Portanto, pondo $a_k = k!$ para $k \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} j(j!) &= \sum_{j=1}^{n} [(j+1)! - j!] = \sum_{j=1}^{n} (a_{j+1} - a_j) \\ &= a_{n+1} - a_1 = (n+1)! - 1! \\ &= (n+1)! - 1.\end{aligned}$$

■

Também podemos introduzir uma notação bastante útil para representar produtos, conforme ensina a seguinte

Definição 4.27. Dada uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$, escrevemos $\prod_{j=1}^{n} a_j$ para denotar o produto $a_1 a_2 \ldots a_n$, e lemos o **produtório dos** a_j, **para** $1 \leq j \leq n$. Assim,

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = \begin{cases} a_1 & , \text{ se } n = 1 \\ a_1 a_2 \ldots a_n & , \text{ se } n > 1 \end{cases}.$$

Com o uso da notação $\prod$, podemos denotar o fatorial de $n \in \mathbb{N}$ (veja o parágrafo imediatamente anterior ao exemplo 4.26) escrevendo

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j. \tag{4.17}$$

Assim como com somatórios, a utilidade da notação $\prod$ se deve ao fato dela *comutar formalmente* com os símbolos de multiplicação

e divisão. De fato, dados um número real c e sequências $(a_k)_{k\geq 1}$ e $(b_k)_{k\geq 1}$, temos

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_n) = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \cdots (a_n b_n),$$

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} = \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n}$$

e

$$c^n (a_1 a_2 \cdots a_n) = (ca_1)(ca_2) \cdots (ca_n)$$

(a segunda igualdade acima desde que os b_j sejam todos não nulos). Escrevendo ambos os membros dessas identidades usando produtórios, obtemos as igualdades

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\prod_{j=1}^{n} b_j\right) = \prod_{j=1}^{n} (a_j b_j),$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n} a_j}{\prod_{j=1}^{n} b_j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b_j} \quad \text{e} \quad c^n \prod_{j=1}^{n} a_j = \prod_{j=1}^{n} (ca_j).$$

Vejamos um exemplo de aplicação de tais fórmulas.

Exemplo 4.28. Calcule, em função de n, o valor de $\prod_{k=1}^{n} \left(2 + \frac{2}{k}\right)$.

Solução.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \left(2 + \frac{2}{k}\right) &= \prod_{k=1}^{n} 2\left(\frac{k+1}{k}\right) = 2^n \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n} k} \\ &= 2^n \frac{(n+1)!}{n!} = 2^n \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} \\ &= 2^n (n+1).\end{aligned}$$

■

Analogamente ao caso de somatórios, a notação $\prod$ é particularmente útil para a realização de cancelamentos em produtos, de acordo com a fórmula para **produtos telescópicos**, colecionada na seguinte

Proposição 4.29. Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência de reais não nulos, então

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{a_{n+1}}{a_1}. \tag{4.18}$$

Prova. Como com somas telecópicas, basta observarmos que os fatores intermediários do produto do primeiro membro acima se cancelam. Em símbolos,

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1}.$$ ■

Exemplo 4.30. Examinemos novamente o exemplo 4.28 à luz de produtos telescópicos. Para tanto, veja primeiro que, como antes,

$$\prod_{k=1}^{n} \left(2 + \frac{2}{k}\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right).$$

Definindo agora a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ por $a_k = k$, segue que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(2 + \frac{2}{k}\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = 2^n \cdot \frac{a_{n+1}}{a_1} = 2^n(n+1).$$

Problemas – Seção 4.4

1. Prove que uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de segunda ordem se, e só se, $a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k \neq 0$ e $a_{k+3} - 3a_{k+2} + 3a_{k+1} - a_k = 0$ para todo inteiro $k \geq 1$.

2. Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ a sequência definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + 3n - 1$ para todo inteiro positivo n. Calcule, em função de n, o $n-$ésimo termo dessa sequência.

3. A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é dada por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + 8n$ para $n \geq 1$. Calcule a_n em função de n.

4. * Calcule, em função de $n \in \mathbb{N}$, o valor da soma $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}$.

5. A sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA. Prove que, para todo inteiro positivo n, temos

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

6. Prove que, para todo inteiro positivo n, tem-se

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

7. Calcule, em função de $n \in \mathbb{N}$, o valor da soma $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$.

8. (Romênia.) Sejam k e n inteiros positivos. Prove que:

   (a) $(2k+1)^3 - (2k-1)^3$ sempre pode ser escrito como a soma de três quadrados perfeitos.

   (b) $(2n+1)^3 - 2$ sempre pode ser escrito como a soma de $3n-1$ quadrado perfeitos.

9. Calcule, em função de $n > 1$ inteiro, o valor da soma $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

10. (OBM - adaptado.) Faça os seguintes itens:

    (a) Para k natural, escreva $(k+1)^2 + k^2 + k^2(k+1)^2$ como um quadrado perfeito.

    (b) Use o item (a) e somas telescópicas para calcular o valor da soma

$$\sum_{k=1}^{99} \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + 1}.$$

11. * (OBM.) Seja $(F_k)_{k\geq 1}$ a sequência de Fibonacci, i.e., a sequência dada por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, para todo $k \geq 1$ inteiro. Calcule, em função de n, o valor da soma $\sum_{k=1}^{n} \frac{F_{k+1}}{F_k F_{k+2}}$.

12. A sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA. Prove que, para todo inteiro positivo n, temos

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

13. (a) Fatore a expressão $x^4 + x^2 + 1$.

    (b) Use o item (a) para calcular o valor da soma $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1}$.

14. (Austrália.) Calcule o valor da soma

$$\sum_{k=1}^{999999} \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k^2-1} + \sqrt[3]{(k-1)^2}}.$$

15. Calcule, em função de n, o valor da soma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$

16. (Alemanha.) Dado $n > 1$ natural, calcule em função de n o valor de $\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right)$.

17. Para $0 \leq k \leq 101$, seja $x_k = \frac{k}{101}$. Calcule o valor da soma

$$\sum_{k=0}^{101} \frac{x_k^3}{1 - 3x_k + 3x_k^2}.$$

18. (Leningrado.) Calcule em função de n o valor do produto

$$\prod_{k=2}^{n-1} \frac{k^3+1}{k^3-1}.$$

19. (Macedônia.) Ache todos os valores de n para os quais possamos escrever o conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 4n\}$ como a união de n conjuntos, dois a dois disjuntos e com 4 elementos cada, tais que em cada um deles um dos elementos seja igual à média aritmética dos três demais.

20. (China.) Calcule o maior inteiro menor ou igual que o número

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

21. * Dados inteiros positivos n e p, prove que:

    (a) $k^p < \frac{(k+1)^{p+1} - k^{p+1}}{p+1} < (k+1)^p$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

    (b) $\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$.

CAPÍTULO 5

Indução Finita

De posse do ferramental algébrico básico visto até aqui, concentramo-nos a partir de agora na obtenção de vários desenvolvimentos importantes. A ideia central é o princípio de indução finita, ferramenta que aumenta em muito nossa capacidade de elaborar demonstrações. Após apresentá-lo, o aplicamos, dentre outros, para deduzir a fórmula de expansão binomial e a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Várias são as maneiras de demonstrarmos algo. Podemos fazer uma prova direta ou uma prova por contradição, por exemplo (para mais sobre Lógica e técnicas de demonstração, veja o excelente livro de D. Cordeiro [14]). O princípio de indução será, para nós, mais uma ferramenta para demonstrações, ademais muito útil.

Para entender como ele funciona, considere um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in A$. Suponha ainda que saibamos que toda vez que um certo

natural k estiver em A, então $k+1$ também está em A. Então, $1 \in A$ assegura que $2 \in A$. Por sua vez, $2 \in A$ nos permite concluir que $3 \in A$. Assim por diante, concluímos que A contém todos os naturais, ou seja, $A = \mathbb{N}$. A discussão intuitiva acima pode ser formalizada no seguinte axioma, conhecido como o **primeiro princípio de indução**.

Axioma 5.1. Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto satisfazendo as seguintes condições:

(*a*) $1 \in A$.

(*b*) Se $k \in A$, então $k+1 \in A$.

Então $A = \mathbb{N}$.

Uma pergunta natural nesse momento seria: como aplicar o princípio de indução para demonstrar algo em Matemática? Para responder esta pergunta, suponhamos dada uma propriedade $P(n)$ do natural n, a qual queremos provar ser verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos um conjunto A pondo

$$A = \{k \in \mathbb{N};\ P(k) \text{ é verdadeira}\}$$

e observamos que

$$A = \mathbb{N} \Leftrightarrow (P(n) \text{ é verdadeira para todo } n \in \mathbb{N}).$$

Assim, a fim de mostrarmos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, basta mostrarmos que $A = \mathbb{N}$, ou ainda, pelo primeiro princípio de indução, que

- $1 \in A$;
- $k \in A \Rightarrow k+1 \in A$.

Por sua vez, a definição de A garante que mostrar os dois itens acima é o mesmo que mostrar que

- $P(1)$ é verdadeira;
- $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadeira.

A discussão acima pode ser resumida na seguinte *receita* para **demonstração por indução**.

Proposição 5.2. Dada uma propriedade $P(n)$ do natural n, temos $P(n)$ verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ se e só se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(*a*) $P(1)$ é verdadeira;

(*b*) $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadeira.

Para entender na prática como funciona uma demonstração por indução, vejamos os dois exemplos a seguir.

Exemplo 5.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros naturais ímpares é igual a n^2.

Prova. Como o k-ésimo natural ímpar é o número $2k-1$, a propriedade $P(n)$ é, neste caso

$$P(n): \ \sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2.$$

Para fazer uma demonstração por indução, temos de verificar que:

i. $P(1)$ é verdadeira.

ii. $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadeira.

A verificação de i. é imediata: o primeiro natural ímpar é 1, o mesmo que 1^2. Para provarmos ii., supomos que $P(k)$ é verdadeira, i.e., que

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2$$

e queremos deduzir que $P(k+1)$ também é verdadeira, i.e., que

$$1+3+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2.$$

Mas desde que estamos supondo a validez de $P(k)$, segue que

$$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Portanto, por indução, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 5.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros quadrados perfeitos é igual a

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Prova. Como o $k-$ésimo quadrado perfeito é o número k^2, a propriedade $P(n)$ é, neste caso

$$P(n): \quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Como antes, para fazer uma demonstração por indução temos de verificar que:

i. $P(1)$ é verdadeira.

ii. $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadeira.

Verificar i. é novamente imediato: $1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$. Para verificar ii. supomos que $P(k)$ é verdadeira, i.e., supomos que

$$\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1),$$

e queremos deduzir que $P(k+1)$ também é verdadeira, i.e., que

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^2 = \frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1].$$

Mas desde que estamos supondo a validez de $P(k)$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= \sum_{j=1}^{k} j^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)] \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).
\end{aligned}$$

Portanto, por indução $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Uma forma ligeiramente mais geral do primeiro princípio de indução pode ser enunciada como abaixo.

Axioma 5.5. Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $A \subset \{a, a+1, a+2, \ldots\}$ um conjunto satisfazendo as seguintes condições:

(a) $a \in A$.

(b) Se $k \in A$, então $k+1 \in A$.

Então $A = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$.

Essa variante do princípio de indução dá mais versatilidade a sua aplicação como método de demonstração. Mais uma vez, suponhamos dada uma propriedade $P(n)$ do natural n, a qual queremos demonstrar ser verdadeira para todo natural a partir de um certo a (ou seja, para todo natural $n \geq a$). Para isso definimos o conjunto

$$A = \{k \in \mathbb{N};\ P(k) \text{ é verdadeira}\}$$

e observamos que

$$A = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$$
$$\Updownarrow$$
$$P(n) \text{ é verdadeira para todo } n \geq a \text{ natural.}$$

Obtemos, assim, a seguinte variante mais geral da receita de demonstração por indução.

Proposição 5.6. Dados $a \in \mathbb{N}$ e uma propriedade $P(n)$ do natural n, temos $P(n)$ verdadeira para todo natural $n \geq a$, se e só se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(a) $P(a)$ é verdadeira;

(b) $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadeira.

Essa forma mais geral de demonstração por indução é às vezes realmente necessária. O próximo exemplo ilustra esse ponto.

Exemplo 5.7. Para todo natural $n \geq 4$, temos $n! > 2^n$.

Prova. Observe primeiro que temos realmente de começar com pelo menos $n = 4$, pois a desigualdade não é válida para $n = 1, 2, 3$. A propriedade $P(n)$ que desejamos provar é:

$$P(n): \quad n! > 2^n.$$

Para uma demonstração da mesma por indução, temos de provar que $P(4)$ é verdadeira e que $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadeira. A validade de $P(4)$ segue de $4! = 24 > 16 = 2^4$. Suponhamos agora que $P(k)$ é verdadeira para um certo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, que

$$k! > 2^k.$$

Queremos deduzir a veracidade de $P(k+1)$, i.e., que $(k+1)! > 2^{k+1}$. Para isso veja que, pela veracidade de $P(k)$, temos

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k! > (k+1) \cdot 2^k;$$

por outro lado, segue de $k \geq 4$ que

$$(k+1) \cdot 2^k \geq 2^{k+1}$$

(na verdade, essa última desigualdade vale para todo inteiro $k \geq 1$). Portanto, combinando as duas últimas desigualdades acima obtemos que $(k+1)! > 2^{k+1}$, i.e., que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, por indução $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 4$. ■

Antes de apresentar outro exemplo, façamos uma pequena observação quanto à terminologia: numa demonstração por indução, o passo $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é em geral denominado **passo de indução**. Para executá-lo, supomos que $P(k)$ é verdadeiro (o que constitui nossa **hipótese de indução**), e então deduzimos que $P(k+1)$ também é verdadeiro. Assim, uma prova por indução nos moldes da proposição 5.6 pode ser resumida do seguinte modo:

- *identificação* da propriedade $P(n)$ a ser provada;
- *caso inicial:* verificação da validade de $P(a)$;
- *hipótese de indução:* suposição da validade de $P(k)$.
- *passo de indução:* dedução da validade de $P(k+1)$ usando a hipótese de indução.

Uma vez que a propriedade $P(n)$ está, em geral, bastante clara no enunciado de cada problema, uma prova por indução utiliza, via de regra, os últimos três itens do esquema acima, não se fazendo menção explícita a $P(k)$ ou ao passo $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. A demonstração do resultado do exemplo a seguir é executada dessa maneira.

Exemplo 5.8 (OBM). Para cada inteiro $n > 2$, mostre que existem n naturais dois a dois distintos, tais que a soma de seus inversos é igual a 1.

Prova. Façamos indução sobre $n \geq 3$. Para verificar o caso inicial, basta notar que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que para um certo $k \geq 3$ natural existam naturais $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ tais que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} = 1.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $\frac{1}{2}$ e somando $\frac{1}{2}$ a ambos os membros da igualdade resultante, obtemos então

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \cdots + \frac{1}{2x_k} = 1.$$

Agora, desde que $2 < 2x_1 < 2x_2 < \cdots < 2x_k$, obtivemos $k+1$ naturais dois a dois distintos com soma dos inversos igual a 1, completando assim nosso passo de indução. ■

Ao usar o princípio de indução para demonstrar algo, devemos ter muito cuidado com a execução do passo de indução, sob a pena de chegarmos a conclusões absurdas. Para melhor ilustrar o que queremos dizer com isso, considere o seguinte exemplo clássico.

Exemplo 5.9. Se, em uma certa fazenda, ao menos um bezerro é branco, prove que todos os bezerros dessa fazenda são brancos.

Prova. "Provemos"a afirmação acima por indução em relação ao número n de bezerros. Para o caso inicial, se em uma fazenda com um bezerro ao menos um bezerro for branco, então certamente todos os bezerros da fazenda serão brancos.

Suponha agora, como hipótese de indução, que em qualquer fazenda com k bezerros, ao menos um dos quais sendo branco, todos serão brancos. Considere então uma fazenda com $k+1$ bezerros, ao menos um dos quais sendo branco. Tire um bezerro da fazenda, que não o que sabemos *a priori* ser branco. Como ficamos com k bezerros na fazenda, ao menos um dos quais ainda branco, segue da hipótese de indução que todos os k bezerros são brancos. Faça, agora, voltar o bezerro inicialmente retirado e faça sair um dos que ficou da primeira vez. Temos novamente k bezerros, ao menos um dos quais branco. Novamente por hipótese de indução todos os k bezerros serão brancos. Mas o que saiu da segunda vez já era branco, de modo que os $k+1$ bezerros são brancos. ■

Evidentemente, há algum absurdo na prova acima, uma vez que a afirmação do enunciado não reflete a realidade. O problema é que não fomos bem sucedidos no passo de indução, uma vez que o argumento acima não funciona para uma sala com 2 alunos, como é imediato verificar.

Há ainda uma outra forma importante de indução, o **segundo princípio de indução** (também chamado **princípio de indução forte**), que passamos a descrever agora.

Axioma 5.10. Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto satisfazendo as seguintes condições:

(*a*) $1 \in A$.

(*b*) Se $\{1, \ldots, k\} \subset A$ então $k+1 \in A$.

Então $A = \mathbb{N}$.

Neste ponto, o uso do segundo princípio de indução em demonstrações deve estar claro para o leitor. Vejamos mais dois exemplos, à guisa de ilustração.

Exemplo 5.11 (OCS - adaptado). Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o número $(7+4\sqrt{3})^n + (7-4\sqrt{3})^n$ é um inteiro positivo e par.

Prova. Sejam $u = 7+4\sqrt{3}$ e $v = 7-4\sqrt{3}$. Então $u+v = 14$ e $uv = 1$, donde segue que u e v são as raízes da equação de segundo grau $x^2 - 14x + 1 = 0$. Segue daí que $u^2 = 14u - 1$ e $v^2 = 14v - 1$, de modo que, para todo $k \geq 2$ inteiro,

$$u^k = 14u^{k-1} - u^{k-2} \quad \text{e} \quad v^k = 14v^{k-1} - v^{k-2}.$$

Assim, sendo $s_j = u^j + v^j$ e somando as duas relações acima obtemos, obtemos para todo $k \geq 2$ que

$$s_k = 14s_{k-1} - s_{k-2}.$$

Agora, $s_0 = 2$ e $s_1 = u + v = 14$ são inteiros. Suponha então, por hipótese de indução, que $s_k \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leq k < n$. Então a recorrência acima nos dá

$$s_n = 14s_{n-1} - s_{n-2},$$

donde concluímos que $s_n \in \mathbb{Z}$, por ser a soma de dois números inteiros.

Para o que falta, note que $u, v > 0$ garante que $s_n = u^n + v^n$ é positivo para todo n. Por fim, a recorrência para a sequência $(s_k)_{k\geq 1}$ também garante que s_k e s_{k-2} têm *mesma paridade* (i.e., ou são ambos pares ou ambos ímpares). Mas desde que s_0 e s_1 são ambos pares, segue novamente por indução que s_n é par para todo n natural. ■

Exemplo 5.12. Todo número natural pode ser escrito de uma única maneira como soma de potências de 2 com expoentes inteiros não negativos e dois a dois distintos, dita sua **representação binária**.

Prova. Provemos por indução forte que, para cada n natural, *existe* uma maneira *única* representação binária de n. Para $n = 1$, temos $1 = 2^0$, e obviamente essa é a única representação possível. Suponha agora que o resultado desejado seja verdadeiro para todo natural menor que n.

Mostremos inicialmente que *existe* uma representação binária de n. Para tanto, tome a maior potência de 2 menor ou igual a n, digamos 2^k. Então

$$2^k \leq n < 2^{k+1},$$

de maneira que $0 \leq n - 2^k < 2^k$. Se $n - 2^k = 0$, nada mais há a fazer. Senão, $1 \leq n - 2^k < n$, e por hipótese de indução existem inteiros não-negativos $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_l$ tais que

$$n - 2^k = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_l}.$$

Mas como também temos $n - 2^k < 2^k$ (veja acima), segue que $2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_l} < 2^k$, e daí $a_l < k$. Portanto,

$$n = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_l} + 2^k,$$

com $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_l < k$.

Mostremos agora que a representação binária é única. Para tanto, suponha que

$$n = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_j} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \cdots + 2^{b_l},$$

com $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_j$ e $0 \leq b_0 < b_1 < \cdots < b_l$. Então

$$\begin{aligned} 2^{a_j} &\leq 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_j} \\ &= n = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \cdots + 2^{b_l} \\ &\leq 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{b_l} \\ &= 2^{b_l+1} - 1, \end{aligned}$$

de maneira que $2^{a_j} < 2^{b_l+1}$ e, portanto, $a_j < b_l + 1$, i.e., $a_j \leq b_l$. Trocando os papéis de a_j e b_l na discussão acima, concluímos analogamente que $b_l \leq a_j$, e daí $a_j = b_l$. Denotando $a_j = b_l = k$, digamos, segue que

$$n - 2^k = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_{j-1}} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \cdots + 2^{b_{l-1}}.$$

Utilizando agora a parte de unicidade da hipótese de indução, segue de $n - 2^k < n$ que $j - 1 = l - 1$ e $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_{j-1} = b_{l-1}$, como desejado. ■

Antes de seguirmos para os exercícios, mais uma observação. Nem sempre usar indução é a melhor maneira de demonstrar algo. Um exemplo é a fórmula da soma dos n primeiros inteiros positivos. Tente demonstrá-la por indução e compare com a prova obtida por meio da teoria de progressões aritméticas...

Problemas – Capítulo 5

1. Prove por indução que a soma dos n primeiros inteiros positivos é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Prove que, para todo inteiro $n \geq 1$, temos

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

3. Prove que, para todo inteiro positivo n, tem-se

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

4. (Canadá.) Para n inteiro positivo, seja $h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Prove que

$$n + h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1) = nh(n).$$

5. Mostre que, para cada inteiro $n > 1$, temos

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1).$$

6. Mostre que, para cada inteiro $n > 1$, temos

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{6}(2n-1)2n(2n+1).$$

7. Prove que, para cada n natural, 9 divide $4^n + 15n - 1$.

8. Prove que, para cada n natural, 3 divide $n^3 - n$.

9. * Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ duas sequências satisfazendo a recorrência linear de segunda ordem e com coeficientes constantes $u_{k+2} + ru_{k+1} + su_k = 0$, para todo $k \geq 1$. Se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$, prove que $a_n = b_n$, para todo $n \geq 1$. Em seguida, estenda esse resultado ao caso em que as sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ satisfaçam uma mesma recorrência linear de terceira ordem e com coeficientes constantes.

10. Seja (a_k) uma sequência de reais não nulos tais que, para todo $n \geq 2$, tenhamos

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Prove que a sequência é uma PA.

11. (Bulgária - adaptado.) * A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de reais é definida por $a_1 = 1$ e, para $n \geq 1$ inteiro, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Prove que, para todo inteiro $n \geq 1$, temos:

   (a) $a_{n+1} = 1 + a_1 \ldots a_n$.

   (b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 2 - \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

12. Prove que, para todo n natural, temos $2^{2^n} > n^n$.

13. Seja $(F_n)_{n\geq 1}$ a sequência de Fibonacci (cf. exemplo 4.17). Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, as identidades a seguir são verdadeiras:

   (a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

   (b) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

   (c) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

   (d) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

   (e) $F_1F_2 + F_3F_4 + F_5F_6 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$.

   (f) $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$.

14. Seja $(F_n)_{n\geq 1}$ a sequência de Fibonacci. Prove que, para todo inteiro $n \geq 13$, temos $F_n > n^2$. Conclua, daí, que F_n é um quadrado perfeito se, e só se, $n = 1$, 2 ou 12.

15. Dado $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, faça os seguintes itens:

   (a) Prove que $\alpha^n = F_n \cdot \alpha + F_{n-1}$, para todo inteiro $n \geq 1$, onde $(F_n)_{n\geq 1}$ é a sequência de Fibonacci.

   (b) Ache todos os $n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha^n - n^2\alpha$ seja inteiro.

16. (Macedônia.) Seja x um real não nulo tal que $x + x^{-1} \in \mathbb{Z}$. Prove que $x^n + x^{-n} \in \mathbb{Z}$ para todo inteiro n.

17. (OBM.) Sejam $(x_k)_{k\geq 1}$ e $(y_k)_{k\geq 1}$ sequências de números reais tais que, para todo n natural, temos $x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n$ e $y_{n+1} = y_n^3 - 3y_n$. Se $x_1^2 = y_1 + 2$, mostre que $x_n^2 = y_n + 2$ para todo n natural.

18. (Putnam.) Seja $(x_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de reais não nulos satisfazendo, para todo $n \in \mathbb{N}$, a recorrência $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = 1$. Prove que existe um número real α tal que $x_{n+1} = \alpha x_n - x_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

19. (França.) Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma sequência de reais positivos tal que $a_1 = 1$ e

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

para todo $n \geq 1$. Prove que $a_n = n$ para todo $n \geq 1$.

20. * Fixado um número real $a > 1$, seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequência tal que $\sqrt{a} < x_1 < \sqrt{a} + 1$ e $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$, para todo $k \geq 1$. Prove que, para todo $n \geq 1$, temos

$$\sqrt{a} < x_n \leq \sqrt{a} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

O resultado do problema a seguir é conhecido como o **princípio fundamental da contagem**.

21. * Mostre que, se temos n_1 maneiras de escolher um objeto do tipo 1, n_2 maneiras de escolher um objeto do tipo 2, ..., n_k maneiras de escolher um objeto do tipo k, então o número de maneiras de escolher, simultaneamente, um objeto de cada um dos tipos de 1 a k é $n_1 \ldots n_k$.

22. * Prove que um conjunto com n elementos tem exatamente 2^n subconjuntos.

23. (Índia.) Prove que, para $n \geq 6$, todo quadrado pode ser particionado em n outros quadrados.

24. (Alemanha.) Dado $n \in \mathbb{N}$, prove que podemos montar um tabuleiro $2^n \times 2^n$ usando uma peça 1×1 e vários *L-tridominós* (peças do formato abaixo, onde cada quadradinho tem lado 1)

25. Prove que 3^n divide $4^{3^{n-1}} - 1$, para todo inteiro $n \geq 1$.

26. (França.) Prove que para $n > 5$ inteiro, existem n inteiros positivos tais que a soma dos inversos de seus quadrados seja igual a 1.

27. (Rússia.) Seja n um inteiro positivo ímpar. Em um campo aberto, n crianças estão de tal modo posicionadas que, para cada uma delas, as distâncias às outras $n-1$ crianças são todas distintas. Cada criança tem uma pistola d'água e, ao som de um apito, atira na criança mais próxima de si. Mostre que uma das crianças permanecerá enxuta.

28. (Suécia.) Prove que, para todo n natural, existe uma única sequência $(a_j)_{j\geq 1}$ de inteiros tais que $0 \leq a_j \leq j$, para todo

$j \geq 1$, e

$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots.$$

29. * Prove o **teorema de Zeckendorff**: todo número natural pode ser unicamente escrito como soma de números de Fibonacci de índices maiores que 1 e não consecutivos.

CAPÍTULO 6

Binômio de Newton

O objetivo principal deste capítulo é obter uma fórmula para o desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$ e, com isso, essencialmente completar nosso estudo de identidades algébricas, iniciado na seção 2.1. Para tanto, temos inicialmente de estudar os *números binomiais*, que, como veremos, possuem várias outras aplicações interessantes.

6.1 Números binomiais

Comecemos relembrando a definição de fatorial, estendida aos inteiros não negativos.

Definição 6.1. Dado um inteiro não negativo n, o **fatorial** de n é o número

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \prod_{j=1}^{n} j, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}.$$

Em princípio poderia parecer mais razoável definirmos $0! = 0$, mas as razões para a convenção $0! = 1$ logo ficarão evidentes.

Definição 6.2. Dados inteiros n e k, com $0 \leq k \leq n$, definimos o **número binomial** $\binom{n}{k}$ por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

É de fácil verificação que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Por outro lado, para todos os inteiros n e k tais que $0 \leq k \leq n$, tem-se

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{6.1}$$

Observe que $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ e $\binom{n}{2}$ (esse último em virtude do fato de que o produto de dois inteiros consecutivos é par) são todos números naturais. Por outro lado, a igualdade de números binomiais acima garante que $\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$ e $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$ também são todos naturais. Cumpre então perguntar se $\binom{n}{k}$ é natural para todas as escolhas de inteiros n e k, tais que $0 \leq k \leq n$. Tal é de fato o caso, e será deduzido mais adiante como consequência da relação (6.2) a seguir, conhecida como a **relação de Stiefel**.

Proposição 6.3. Se n e k são inteiros tais que $0 \leq k < n$, então

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{6.2}$$

Prova. Basta aplicar a definição de número binomial ao segundo

membro da igualdade acima:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\,\frac{n}{k(n-k)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

■

Com os números binomiais acima definidos construímos uma tabela numérica triangular, o **triângulo de Pascal**, do seguinte modo: Contamos as linhas e colunas a partir de 0, sendo as linhas numeradas de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita; a *entrada* (i.e., o número) da $n^{\underline{a}}$ linha e $k^{\underline{a}}$ coluna é o número binomial $\binom{n}{k}$. Mais especificamente:

- As entradas da coluna 0, lidas de cima para baixo, são respectivamente iguais aos números binomiais

$$\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{2}{0}, \binom{3}{0}, \ldots.$$

  Como já vimos, todos esses números são iguais a 1.

- A linha zero é formada somente pelo número binomial $\binom{0}{0} = 1$. A linha 1 é formada pelos números binomiais $\binom{1}{0}$ e $\binom{1}{1}$, ambos também iguais a 1.

- Em geral, as entradas da linha n, lidas da esquerda para a direita, são respectivamente iguais aos números binomiais

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}.$$

Mostramos, abaixo, as linhas iniciais do triângulo de Pascal, consoante a construção acima descrita:

Triângulo de Pascal

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

Figura 6.1: Blaise Pascal, matemático francês do século XVII. Além do *triângulo* que leva seu nome, Pascal marcou o estudo das cônicas com um importante teorema que muito motivou o desenvolvimento de uma área da Matemática moderna, a *Geometria Algébrica.*

Em relação ao triângulo de Pascal, a relação de Stiefel diz que, ao somarmos, na linha $n-1$, as entradas da coluna $k-1$ e da coluna k,

obtemos a entrada da linha n e coluna k. Isto é mais difícil de dizer do que entender e verificar, e permite obtermos recursivamente os valores numéricos dos números binomiais $\binom{n}{k}$. A tabela a seguir mostra os valores numéricos do números binomiais $\binom{n}{k}$ para $0 \leq n \leq 6$, obtidos com o auxílio da relação de Stiefel.

Valores numéricos das entradas do triângulo de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Mais geralmente, desde que para todo inteiro $n \geq 0$ temos $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = 1$, não é difícil o leitor se convencer de que, para todos os inteiros n e k tais que $0 \leq k \leq n$, temos $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$. Damos a seguir uma prova formal desse fato no corolário a seguir.

Corolário 6.4. Para todos os inteiros n e k tais que $0 \leq k \leq n$, temos $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Prova. Façamos indução sobre $n \geq 0$, sendo o caso $n = 0$ óbvio: o único número binomial nessas condições é $\binom{0}{0} = 1$.

Suponha, por hipótese de indução, que $\binom{n-1}{j}$ é natural para todo $0 \leq j \leq n-1$, e consideremos um número binomial da forma $\binom{n}{k}$. Há dois casos a considerar: se $k = n$, então já observamos que $\binom{n}{n} = 1$, um natural; se $k \leq n-1$, então segue por hipótese de indução que $\binom{n-1}{k}$ e $\binom{n-1}{k-1}$ são ambos naturais, e a relação de Stiefel garante que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \in \mathbb{N}. \qquad \blacksquare$$

Veremos adiante que uma das principais utilidades do triângulo de Pascal é fornecer um processo fácil e rápido para a obtenção da expansão do binômio $(x+y)^n$, conforme a proposição 6.8 a seguir. Por enquanto, vamos estabelecer algumas identidades relacionadas às suas linhas, colunas e diagonais.

A fórmula da proposição a seguir é conhecida como o **teorema das colunas** do triângulo de Pascal.

Proposição 6.5. Na coluna n do triângulo de Pascal, a soma das entradas das linhas $n, n+1, \ldots, n+k-1$ é igual à entrada situada na coluna $n+1$ e linha $n+k$. Em símbolos,

$$\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n+j}{n}=\binom{n+k}{n+1}. \tag{6.3}$$

Prova. Façamos uma prova por indução sobre $k \geq 1$. O caso inicial $k=1$ se resume a verificar que $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$, sendo, portanto, imediato.

Por hipótese de indução, suponha que, quando $k=l\geq 1$, (6.3) é verdadeira para todo inteiro $n \geq 0$. Então, para $k=l+1$ e todo $n \geq 0$ inteiro, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{l}\binom{n+j}{n} &= \sum_{j=0}^{l-1}\binom{n+j}{n}+\binom{n+l}{n}\\ &= \binom{n+l}{n+1}+\binom{n+l}{n}\\ &= \binom{n+l+1}{n+1},\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a relação de Stiefel. Portanto, segue por indução que (6.3) é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $n \geq 0$. ■

Ilustremos o uso do teorema das colunas utilizando-o para calcular a soma dos n primeiros quadrados perfeitos.

Exemplo 6.6. Calcule, para cada $n \in \mathbb{N}$, o valor da soma

$$1^2+2^2+\cdots+n^2.$$

Solução. Se $S=\sum_{j=1}^{n} j^2$, então

$$S=\sum_{j=1}^{n} j(j-1)+\sum_{j=1}^{n} j=2\sum_{j=2}^{n}\binom{j}{2}+\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{1}.$$

Segue então do teorema das colunas que

$$S=2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$ ■

Para $n \geq 0$ inteiro, a *diagonal* n do triângulo de Pascal é formada pelos números binomiais

$$\binom{n}{0},\binom{n+1}{1},\binom{n+2}{2},\binom{n+3}{3},\ldots$$

O corolário a seguir é o **teorema das diagonais** do triângulo de Pascal.

Corolário 6.7. Na diagonal n do triângulo de Pascal, a soma das entradas das linhas $0, 1, \ldots, k-1$ é igual ao número situado na linha $n+k$ e na coluna $k-1$. Em símbolos,

$$\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n+j}{j}=\binom{n+k}{k-1}. \tag{6.4}$$

Prova. Desde que $\binom{n+j}{j}=\binom{n+j}{n}$, temos pelo teorema das colunas que

$$\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n+j}{j}=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n+j}{n}=\binom{n+k}{n+1}=\binom{n+k}{k-1}.$$ ■

Problemas – Seção 6.1

1. Prove que $\binom{2n}{n}$ é par, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, use os resultados desta seção para calcular o valor da soma $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

3. * Para n natural, prove que
$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > \cdots > \binom{n}{n}$$
se n é par, e
$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \cdots > \binom{n}{n}$$
se n é ímpar.

4. Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, tem-se $2^{\frac{5n}{4}} < \binom{2n}{n}$.

5. Dados naturais k e m, com $m > k$, prove que
$$\sum_{n=k}^{m} \frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n}{k}\binom{n+1}{k}} = 1 - \frac{1}{\binom{m+1}{k}}.$$

6. Sejam n, k inteiros, com $0 \leq k \leq n$. Prove que
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

7. Seja $(F_k)_{k\geq 1}$ a sequência de Fibonacci. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos
$$F_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-j-1}{j},$$
onde, $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n-1}{2}$, i.e.,
$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \frac{n-3}{2}, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}.$$

8. * Para inteiros n e k tais que $0 \leq k \leq n$, prove que o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tem exatamente $\binom{n}{k}$ subconjuntos de k elementos.

6.2 A fórmula do binômio

Obteremos a seguir a fórmula do **binômio de Newton**, ou seja, da expansão da expressão $(x + y)^n$ em monômios.
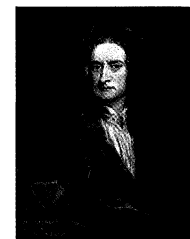
Figura 6.2: O matemático e físico inglês Isaac Newton é considerado um dos maiores cientistas que a humanidade já conheceu, sendo difícil mensurar sua contribuição para o desenvolvimento da ciência. Considerado o pai da Física moderna, Newton criou, juntamente com G. W. Leibniz, os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral, pedra fundamental do desenvolvimento científico e tecnológico vivenciado desde sua época, no final do século XVII, até os dias de hoje.

Teorema 6.8. Para $n \in \mathbb{N}$, temos
$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j. \qquad (6.5)$$

Prova. Façamos uma demonstração por indução sobre o expoente n do binômio. Para $n = 1$, temos

$$(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0}x^1 + \binom{1}{1}y^1.$$

Suponha, por hipótese de indução, que (6.5) é verdadeira quando $n = k$, i.e., que Para $n = k + 1$, temos então que

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= (x+y)(x+y)^k = (x+y)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^{k-j}y^j \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^{k+1-j}y^j + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^{k-j}y^{j+1} \\ &= x^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}x^{k+1-j}y^j + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}x^{k-j}y^{j+1} + y^{k+1}.\end{aligned}$$

Façamos, na última expressão acima, as seguintes trocas nos índices dos somatórios: no primeiro somatório troque j por l e no segundo somatório troque $j+1$ por l; desse modo, no segundo somatório temos $j = l - 1$ e $0 \leq j \leq k-1 \Leftrightarrow 1 \leq l \leq k$. Assim procedendo, obtemos

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= x^{k+1} + \sum_{l=1}^{k}\left[\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1}\right]x^{k+1-l}y^l + y^{k+1} \\ &= x^{k+1} + \sum_{l=1}^{k}\binom{k+1}{l}x^{k+1-l}y^l + y^{k+1},\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos a relação de Stiefel. Por fim, desde que $\binom{k+1}{0} = \binom{k+1}{k+1} = 1$, podemos escrever a última linha acima como

$$\binom{k+1}{0}x^{k+1} + \sum_{l=1}^{k}\binom{k+1}{l}x^{k+1-l}y^l + \binom{k+1}{k+1}y^{k+1},$$

ou, o que é o mesmo,

$$\sum_{l=1}^{k+1}\binom{k+1}{l}x^{k+1-l}y^l,$$

exatamente a expressão que desejávamos obter. Logo, temos por indução que (6.5) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 6.9. Para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(x-y)^n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}x^{n-j}y^j.$$

Prova. Basta aplicar (6.5), trocando y por $-y$. ■

É costume denotarmos

$$T_j = \binom{n}{j}x^{n-j}y^j.$$

Tal monômio T_j é o **termo geral** do binômio $(x+y)^n$, e temos

$$(x \pm y)^n = T_0 \pm T_1 \mp \cdots (\pm 1)^n T_n.$$

Colecionamos no que segue alguns exemplos de aplicação da fórmula do binômio, assim como algumas consequências importantes da mesma.

Exemplo 6.10. Encontre o menor $n \in \mathbb{N}$ para o qual haja, no desenvolvimento binomial de $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$, algum termo independente de x. Para tal n, calcule tal termo independente.

Solução. O termo geral do desenvolvimento da expressão acima é

$$\binom{n}{k}(x\sqrt{x})^{n-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \binom{n}{k}x^{\frac{3}{2}(n-k)}x^{-4k} = \binom{n}{k}x^{\frac{3n-11k}{2}}.$$

Portanto, há termo independente de x se e só se existir $0 \leq k \leq n$ tal que $3n - 11k = 0$, donde em particular $11 \mid n$. Logo, o menor valor possível de $n \in \mathbb{N}$ é $n = 11$; nesse caso, deve ser $k = 3$, e daí o termo independente de x é igual a $\binom{11}{3} = 165$. ■

Exemplo 6.11. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $a, b, r \in \mathbb{Q}$, com $r > 0$ tal que $\sqrt{r}$ é irracional. Então:

(a) Existem $c, d \in \mathbb{Q}$ tais que $(a + b\sqrt{r})^k = c + d\sqrt{r}$.

(b) Se $(a + b\sqrt{r})^k = c + d\sqrt{r}$, com $c, d \in \mathbb{Q}$, então $(a - b\sqrt{r})^k = c - d\sqrt{r}$.

Prova.
(a) Desenvolvendo o binômio $(a + b\sqrt{r})^k$, obtemos

$$(a + b\sqrt{r})^k = \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ 2 \mid j}} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \sqrt{r^j} + \sqrt{r} \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ 2 \nmid j}} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \sqrt{r^{j-1}}.$$

Fazendo

$$c = \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ 2 \mid j}} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \sqrt{r^j} \quad \text{e} \quad d = \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ 2 \nmid j}} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \sqrt{r^{j-1}},$$

é imediato que $c, d \in \mathbb{Q}$ (uma vez que $\sqrt{r^j}$ para j par, e $\sqrt{r^{j-1}}$ para j ímpar, são ambos racionais).

(b) Basta observar que o desenvolvimento de $(a - b\sqrt{r})^k$ é essencialmente igual ao desenvolvimento de $(a + b\sqrt{r})^k$, desse diferindo apenas pelo sinal de alguns termos:

$$\begin{aligned}(a - b\sqrt{r})^k &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ 2 \mid j}} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \sqrt{r^j} - \sqrt{r} \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ 2 \nmid j}} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \sqrt{r^{j-1}} \\ &= c - d\sqrt{r}.\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.12. Usemos a fórmula do desenvolvimento binomial para demonstrar a **identidade de Lagrange**:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}. \tag{6.6}$$

Escrevendo $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ e aplicando a ambos os membros a fórmula do binômio, obtemos

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right) \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) = \sum_{i,j=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{j} x^{i+j}.$$

Comparando os coeficientes de x^n na primeira e última expressões acima e usando (6.1), obtemos

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$
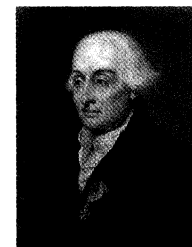
Figura 6.3: Joseph Louis Lagrange, matemático e físico francês do século XVIII. Lagrange foi um dos maiores cientistas de sua época, dando contribuições notáveis também à Física, em especial à Mecânica Celeste.

O item (a) do corolário a seguir é conhecido como o **teorema das linhas** do triângulo de Pascal.

Corolário 6.13. Para $n \in \mathbb{N}$, temos

(a) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$.

(b) $\sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 2 \mid j}} \binom{n}{j} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 2 \nmid j}} \binom{n}{j} = 2^{n-1}$.

Prova. Para o item (a) basta fazer $x = y = 1$ na fórmula do desenvolvimento de $(x+y)^n$. Quanto a (b), fazendo inicialmente $x = 1$ e $y = -1$ na fórmula do binômio, obtemos (verifique!)

$$0 = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 2|j}} \binom{n}{j} - \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 2\nmid j}} \binom{n}{j}.$$

Denotando $A = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 2|j}} \binom{n}{j}$ e $B = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 2\nmid j}} \binom{n}{j}$, segue do item (a) e da relação acima que

$$\begin{cases} A + B & = & 2^n \\ A - B & = & 0 \end{cases}.$$

Portanto, temos que $A = B = 2^{n-1}$. ■

Observação 6.14. Podemos generalizar completamente as fórmulas do item (b) do corolário acima, no seguinte sentido: dados inteiros $0 \leq r < k < n$, é possível calcular em função de n, k e r o valor da soma

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{k+r} + \binom{n}{2k+r} + \cdots.$$

Por exemplo, para $k = 3$ podemos calcular em função de n os valores das somas $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$, $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$ e $\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots$. A dedução correspondente utiliza a *fórmula de multiseção*, obtida com o auxílio de números complexos. A esse respeito, veja o teorema 3.21 e o problema 3.2.5 do volume 6 ou, ainda, a referência [36].

Terminemos este capítulo com uma aplicação do teorema das linhas a mais um cálculo de somas.

Exemplo 6.15. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcule o valor da soma

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}.$$

Solução. Primeiramente, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} j\binom{n}{j} &= j\frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} = n\binom{n-1}{j-1}. \end{aligned}$$

Portanto, segue do teorema das linhas que

$$\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j} = n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1} = n \cdot 2^{n-1}.$$ ■

Problemas – Seção 6.2

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, determine o valor da soma $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 3^j$.
2. Sejam $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$ e $B = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 11^k$. Se $\frac{B}{A} = \frac{3^8}{4}$, calcule o valor de n.
3. Mostre que $(1,1)^n \geq \frac{1}{200}(n^2 + 19n + 200)$.
4. (OCM.) Calcule, sem efetuar diretamente os cálculos, o valor da soma
$$\frac{1}{10!} + \frac{1}{3!8!} + \frac{1}{5!6!} + \frac{1}{7!4!} + \frac{1}{9!2!} + \frac{1}{11!}.$$
5. Encontre o termo máximo no desenvolvimento de $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{65}$.
6. (Baltic Way). Sejam a, b, c e d números reais tais que $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$. Prove que $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$.
7. Para n natural, prove que $\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n-1}}{n}$.

8. No desenvolvimento de $x(1+x)^n$, dividimos o coeficiente de cada termo pelo expoente de x no termo. Prove que a soma de todos esses números é igual a $\frac{2^{n+1}-1}{n}$.

9. Para $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, calcule o valor das somas $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j a^j$ e $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j^2$.

10. A sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA. Prove que, para todo inteiro $n > 1$, valem as identidades

    (a) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} a_j = 0$.

    (b) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} a_{j+1}^2 = 0$.

11. * Se $0 < q < 1$ e $n \in \mathbb{N}$, prove que $q^n < \frac{q}{q+n(1-q)}$.

12. Dados $a, b, n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, prove que o número $\sqrt{a} + \sqrt[n]{b}$ é raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros e grau $2n$.

13. (Croácia.) Sejam x, y e z reais não nulos, tais que $x+y+z=0$. Prove que o valor da expressão

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{xyz(xy + yz + zx)}$$

não depende de x, y e z.

14. * O propósito deste problema é estabelecer uma fórmula para a expansão de $(x+y+z)^n$, onde $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Para tanto, comecemos definindo, para inteiros não negativos j, k, l tais que $j+k+l=n$, o **número trinomial** $\binom{n}{j,k,l}$ por

$$\binom{n}{j,k,l} = \frac{n!}{j!k!l!}.$$

Prove a **fórmula de expansão trinomial**

$$(x+y+z)^n = \sum_{j+k+l=n} \binom{n}{j,k,l} x^j y^k z^l, \qquad (6.7)$$

onde a notação $\sum$ acima é uma abreviação para a soma de todos os monômios do tipo $\binom{n}{j,k,l} x^j y^k z^l$, quando j, k, l assumem todos os possíveis valores inteiros não negativos tais que $j+k+l=n$.

15. Use o resultado do problema anterior para obter os termos do desenvolvimento dos trinômios $(x+y+z)^3$ e $(x+y+z)^4$.

16. Calcule, no desenvolvimento de $\left(1 + x + \frac{6}{x}\right)^{10}$, o termo independente de x.

17. Prove as identidades a seguir envolvendo números trinomiais:

    (a) $\sum_{j+k+l=n} \binom{n}{j,k,l} = 3^n$.

    (b) $\sum_{j+k+l=n} (-1)^l \binom{n}{j,k,l} = 1$.

18. * Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a identidade

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} F_{2n+1-j} = F_{2n+1} - 1,$$

onde F_k denota o k-ésimo número de Fibonacci.

19. Prove que

$$\sum_{k=0}^{995} \frac{(-1)^k}{1991-k} \binom{1991-k}{k} = \frac{1}{1991}.$$

CAPÍTULO 7

Desigualdades Elementares

Uma **inequação** é uma sentença de uma das formas $E \geq F$, $E > F$, $E < F$ ou $E \leq F$, onde E e F são expressões em uma ou mais variáveis. *Resolver* uma inequação significa encontrar todos os valores da(s) variável(is) que a tornem uma desigualdade verdadeira.

Uma inequação não necessariamente se torna uma desigualdade verdadeira para todos os valores reais possíveis das variáveis. Para exemplificar, considere a inequação

$$x + x^3 + 1 \geq 5x^4.$$

Ao atribuirmos à variável x o valor real 2, a desigualdade resultante $11 \geq 80$ é falsa. Por outro lado, conforme o corolário 1.5, a inequação $x^2 + y^2 \geq 0$ se torna uma desigualdade verdadeira quaisquer que sejam os valores reais atribuídos a x e y.

Doravante, sempre que não houver perigo de confusão, denominaremos **desigualdades (algébricas)** às inequações que se tornam desigualdades verdadeiras para todos (ou quase todos[1]) os valores possíveis das variáveis.

Este capítulo é um convite inicial ao estudo sistemático de desigualdades algébricas. Nosso objetivo primordial aqui é discutir alguns exemplos interessantes de desigualdades, para a derivação das quais usamos as ferramentas desenvolvidas até agora. Um tratamento mais completo pode ser encontrado em [37]; veja também as seções 5.4 e 6.5 do volume 3, bem como a seção 5.2 do volume 6.

7.1 A desigualdade triangular

Comecemos estudando duas desigualdades envolvendo módulos de números reais. A desigualdade da proposição a seguir é conhecida como a **desigualdade triangular**.

Proposição 7.1. Para todos os reais não nulos a e b, temos

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \tag{7.1}$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, a e b tiverem um mesmo sinal.

Prova. Como $|a+b|$ e $|a|+|b|$ são ambos não-negativos, temos

$$\begin{aligned} |a+b| \leq |a|+|b| &\Leftrightarrow |a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2 \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|ab| \\ &\Leftrightarrow 2ab \leq 2|ab|, \end{aligned}$$

o que é claramente verdadeiro. Segue também dos cálculos anteriores que $|a+b| = |a|+|b|$ se, e só se, $ab = |ab|$, o que por sua vez ocorre

[1]O significado da expressão *quase todos* nesse contexto ficará claro à medida em que prosseguirmos nosso estudo.

se, e só se, $ab \geq 0$. Mas como $a, b \neq 0$, teremos igualdade se, e só se, $ab > 0$. ■

Corolário 7.2. Para todos a e b reais, temos

$$||a| - |b|| \leq |a-b|,$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, a e b têm um mesmo sinal.

Prova. Aplicando a desigualdade triangular com $a-b$ no lugar de a, obtemos

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|,$$

e daí $|a| - |b| \leq |a-b|$. Repetindo agora o argumento acima trocando os papéis de a e b, segue que $|b|-|a| \leq |a-b|$. Segue então daí que

$$|a-b| \geq \max\{|a|-|b|, |b|-|a|\} = ||a|-|b||,$$

onde, para a última igualdade, utilizamos (2.6).

Por fim, teremos a igualdade se, e só se, a tivermos em pelo menos uma das desigualdades triangulares $|a| \leq |a-b|+|b|$ ou $|b| \leq |b-a|+|a|$, digamos na primeira delas. Mas para que $|a| = |a-b|+|b|$, a condição de igualdade da proposição 7.1 garante que deve ser $(a-b)b \geq 0$, ou, o que é o mesmo, $ab \geq b^2$. Em particular, deve ser $ab > 0$. Reciprocamente, suponha que $ab > 0$ e mostremos que a igualdade ocorre. Há duas possibilidades: $a, b > 0$ ou $a, b < 0$. Suponha que ocorre a primeira possibilidade (a primeira pode ser tratada analogamente). Então $|a| = a$, $|b| = b$, e temos daí que $||a|-|b|| = |a-b|$. ■

Dados números reais não nulos a, b e c, podemos aplicar a desigualdade triangular duas vezes para obter

$$|a+b+c| \leq |a+b| + |c| \leq |a| + |b| + |c|, \tag{7.2}$$

i.e., para obter a desigualdade para três números reais

$$|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|, \tag{7.3}$$

análoga àquela obtida em (7.14), e que, portanto, chamaremos também de *desigualdade triangular*.

Se a igualdade ocorre na desigualdade acima, devemos ter também a igualdade em todas as desigualdades em (7.2), donde em particular em $|a+b| \leq |a|+|b|$. Portanto, segue da proposição 7.1 que a e b têm sinais iguais. Ocorre que podemos também escrever

$$|a+b+c| \leq |a|+|b+c| \leq |a|+|b|+|c|,$$

de maneira que se a igualdade ocorre em (7.3), então os números b e c também devem ter sinais iguais. Reciprocamente, se a, b e c têm todos um mesmo sinal, digamos $a,b,c<0$ (o caso $a,b,c>0$ é análogo), então $a+b+c<0$, de maneira que

$$|a+b+c| = -(a+b+c) = (-a)+(-b)+(-c) = |a|+|b|+|c|.$$

Mostramos então que há igualdade em (7.3) se, e só se, a, b e c têm todos um mesmo sinal.

Analogamente, uma fácil indução permite estabelecer a seguinte generalização da discussão acima, também conhecida na literatura como a **desigualdade triangular**.

Teorema 7.3. Para números reais não nulos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, temos

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|. \tag{7.4}$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e só se, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tiverem todos um mesmo sinal.

Prova. Veja o problema 1. ■

Problemas – Seção 7.1

1. * Prove a versão geral da desigualdade triangular, enunciada no texto como o teorema 7.3.

2. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-100| \geq 50^2.$$

3. Faça os seguintes itens:

   (a) Se $0 \leq x \leq y$, prove que $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$.

   (b) Sejam a, b reais quaisquer, prove que

$$\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|} \geq \frac{|a+b|}{1+|a+b|}.$$

7.2 A desigualdade entre as médias

Conforme veremos aqui, a observação básica para o estudo sistemático de desigualdades é o próprio fato de que o quadrado de todo número real é não-negativo, sendo igual a zero se, e só se, o número em questão for também igual a zero.

Para começar, para $x,y \in \mathbb{R}$ sabemos que $(|x|-|y|)^2 \geq 0$, com a igualdade ocorrendo se, e só se, $|x|=|y|$. Se desenvolvermos a expressão entre parênteses, chegamos à desigualdade $|x|^2+|y|^2 \geq 2|xy|$ ou, o que é o mesmo,

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq |xy|, \tag{7.5}$$

com a igualdade se, e só se, $|x|=|y|$.

Por outro lado, partindo de dois reais positivos quaisquer a e b e fazendo $x=\sqrt{a} \geq 0$ e $y=\sqrt{b} \geq 0$, segue de (7.5) que

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \tag{7.6}$$

com a igualdade ocorrendo se, e só se, $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, i.e., se, e só se, $a=b$.

A simplicidade da desigualdade acima esconde sua importância. Ela é um caso particular de uma desigualdade bem mais geral que discutiremos adiante, denominada a *desigualdade entre as médias aritmética e geométrica* (veja o teorema 7.10 a seguir). Por ora, vejamos como deduzir outras desigualdades interessantes a partir dela.

Exemplo 7.4. Para números reais positivos x e y, temos:

(*a*) $x + \frac{1}{x} \geq 2$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $x = 1$.

(*b*) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $x = y$.

Prova.
(a) Aplicando a desigualdade (7.6) com $a = x$ e $b = \frac{1}{x}$, obtemos

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2,$$

com igualdade se, e só se, $x = \frac{1}{x}$, i.e., se, e só se, $x = 1$ (uma vez que $x > 0$ por hipótese).

(b) Basta desenvolver o produto do enunciado e aplicar em seguida a desigualdade do item (*a*), com $\frac{x}{y}$ no lugar de x:

$$(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2 + 2 = 4.$$

Haverá igualdade se, e só se, $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$, i.e., se, e só se, $x^2 = y^2$. Mas como $x, y > 0$, tal condição é equivalente a termos $x = y$.

Outra possibilidade é aplicar a desigualdade (7.6) duas vezes, multiplicando os resultados:

$$(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = 4.$$

Segue diretamente de (7.6) que haverá igualdade se, e só se, $x = y$. ■

Exemplo 7.5. *Para x, y, z reais positivos, temos sempre*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz, \tag{7.7}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y = z$.

Prova. Para obter a desigualdade, basta somar membro a membro as desigualdades parciais

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy,$$
$$\frac{x^2+z^2}{2} \geq xz,$$
$$\frac{y^2+z^2}{2} \geq yz.$$

Note agora que, se $x = y = z$, então a desigualdade do enunciado claramente se torna uma igualdade. Reciprocamente, se ao menos uma das desigualdades acima for estrita (i.e., não for uma igualdade), digamos $\frac{x^2+y^2}{2} > xy$, então uma generalização óbvia do item (e) da proposição 1.2 garante que, após somarmos as mesmas membro a membro (com a primeira delas trocada por $\frac{x^2+y^2}{2} > xy$), obteremos

$$x^2 + y^2 + z^2 > xy + xz + yz.$$

Portanto, a fim de que ocorra a igualdade na desigualdade do enunciado, devemos ter igualdade nas três desigualdades acima, de maneira que $x = y = z$. ■

Os próximos dois exemplos estendem a desigualdade 7.6 para três e quatro reais positivos. Comecemos com o caso de quatro números.

Exemplo 7.6. Dados reais positivos a, b, c, d, temos

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}, \tag{7.8}$$

com igualdade se, e só se, $a = b = c = d$.

Prova. Já sabemos que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ e $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$. Daí,

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

A igualdade ocorre se, e só se, tivermos igualdade em todas as desigualdades acima. Para haver igualdade na primeira delas, devemos ter $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ e $\frac{c+d}{2} = \sqrt{cd}$, e daí $a = b$ e $c = d$. Para haver igualdade na última desigualdade, devemos ter $\sqrt{ab} = \sqrt{cd}$ ou, ainda, (à luz de $a = b$ e $c = d$) $\sqrt{a^2} = \sqrt{c^2}$, i.e., $a = c$. Daí, a igualdade se dá se, e só se, $a = b = c = d$. ■

O exemplo acima suscita naturalmente a pergunta sobre a validez de uma desigualdade similar para três números reais positivos. Conforme já antecipamos, esse é de fato o caso; entretanto, a dedução da desigualdade análoga à acima não é tão imediata quanto a do exemplo anterior (veja, contudo, o problema 12, página 174).

Exemplo 7.7. Dados reais positivos a, b, c, temos

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \qquad (7.9)$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a = b = c$.

Prova. Escrevendo a desigualdade do exemplo 7.8 para os quatro reais positivos a, b, c e $d = \sqrt[3]{abc}$, obtemos a desigualdade

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} = \sqrt[4]{d^3 d} = d = \sqrt[3]{abc}.$$

Segue daí a desigualdade $a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[3]{abc}$, ou, o que é o mesmo, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Quanto à igualdade, os cálculos acima deixam claro que ela ocorrerá se, e só se, tivermos igualdade na desigualdade

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}.$$

Mas o exemplo 7.6 garante que tal ocorre se, e só se, $a = b = c = \sqrt[3]{abc}$, i.e., se, e só se, $a = b = c$. ■

Neste ponto, o leitor provavelmente está formulando a generalização natural das desigualdades (7.6), (7.8) e (7.9), que também antecipamos ser verdadeira. Todavia, antes de enunciá-la vamos dar uma aplicação interessante de (7.9) ao cálculo de volumes de sólidos.

Exemplo 7.8. Dentre todos os paralelepípedos retângulos com soma total dos comprimentos das 12 arestas igual a 48cm, explique por que o cubo de lado 4cm é aquele de maior volume[2].

Solução. Na figura 7.1, temos um paralelepípedo retângulo com comprimento, largura e altura respectivamente iguais a x, y e z centímetros, e tendo soma das 12 arestas igual a 48cm, i.e., tal que $x + y + z = 12$. É um fato bem conhecido que o volume V de um tal
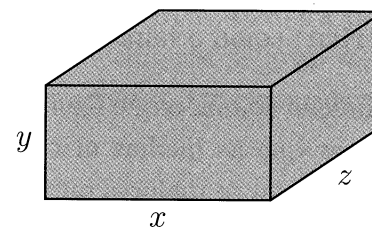
Figura 7.1: paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.

paralelepípedo é dado pela fórmula[3] $V = xyz$. Portanto, algebricamente, nosso problema se resume a *maximizar* xyz, sob as restrições

[2]Para a nomenclatura pertinente à geometria espacial, sugerimos ao leitor a referência [10].

[3]Uma discussão interessante sobre cálculo de volumes, onde é em particular deduzida a fórmula para o cálculo de volumes de paralelepípedos retângulos, pode ser vista em [33].

$x, y, z > 0$ e $x + y + z = 12$. Ora, segue imediatamente de (7.9) que

$$V = xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{12}{3}\right)^3 = 64,$$

i.e., o volume V é igual a no máximo 64cm^3. Sabemos ainda do exemplo 7.7 que o volume será igual a 64cm^3 (i.e., que teremos a igualdade na desigualdade acima) se, e só se, $x = y = z$, e, portanto, se, e só se, $x = y = z = 4\text{cm}$. Assim, o paralelepípedo de volume máximo sujeito às condições do enunciado é o cubo de aresta 4cm. ■

Antes de enunciar a generalização das desigualdades (7.6), (7.8) e (7.9), precisamos da definição a seguir.

Definição 7.9. Para $n > 1$ números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, definimos sua:

(*a*) **Média aritmética** como o número $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

(*b*) **Média geométrica**[4] como o número $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

No contexto da definição acima, o que fizemos em (7.6) e nos exemplos 7.6 e 7.7 foi mostrar que as médias aritméticas de dois, três ou quatro reais positivos são sempre maiores ou iguais que as respectivas médias geométricas, só havendo igualdade em cada caso quando os números forem todos iguais. Estabelecemos o caso geral no seguinte teorema, cuja demonstração pode ser omitida numa primeira leitura. Conforme mencionamos anteriormente, a desigualdade (7.10) a seguir é conhecida como a *desigualdade entre as médias aritmética e geométrica*, ou simplesmente como a **desigualdade entre as médias**.

[4]Talvez o leitor ache útil observarmos que a razão do nome *geométrica* dado ao número em questão se deva ao caso $n = 2$, quando, para $a, b > 0$, o número $\sqrt{ab}$ e a desigualdade (7.6) realmente encerram significados geométricos – veja o problema 4.2.21 do volume 2. No entanto, para $n \geq 3$, o adjetivo *geométrica* carece de significado geométrico.

Teorema 7.10. Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sua média aritmética é sempre maior ou igual que a média geométrica. Em símbolos:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \tag{7.10}$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Prova. Façamos a prova em dois passos.

Primeiramente, provemos por indução que a desigualdade desejada é verdadeira sempre que n for uma potência de 2, ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Para tanto, temos de verificar o caso inicial $n = 2$ (o que já foi feito ao longo da discussão que estabeleceu (7.6)), formular a hipótese de indução (para $n = 2^j$, digamos) e executar o passo de indução (deduzir o caso $n = 2^{j+1}$ a partir do caso $n = 2^j$). Mas desde que $2^{j+1} = 2 \cdot 2^j$, basta supormos que a desigualdade seja verdadeira para quaisquer k reais positivos, com igualdade se, e só se, os k números forem todos iguais, e deduzir a partir daí que ela também será verdadeira para quaisquer $2k$ reais positivos, com igualdade novamente se, e só se, todos os números forem iguais. Para estabelecer esse fato, considere os $2k$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{2k} a_j &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_{k+j}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1 \ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \ldots a_{2k}}\right) \\
&\geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1 \ldots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1} \ldots a_{2k}}} \\
&= \sqrt[2k]{a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{2k}}.
\end{aligned}$$

Para haver igualdade, devemos ter igualdade em todas as passagens. Então, deve ser

$$\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = \sqrt[k]{a_1 \ldots a_k}, \quad \frac{a_{k+1} + \cdots + a_{2k}}{k} = \sqrt[k]{a_{k+1} \ldots a_{2k}}$$

e

$$\frac{\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}}}{2} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1 \dots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}}}.$$

Para as duas primeiras igualdades, devemos ter por hipótese que $a_1 = \dots = a_k$ e $a_{k+1} = \dots = a_{2k}$. Por fim, a última igualdade ocorre se, e só se, $\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} = \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}}$, e esta condição, juntamente com as duas anteriores, implica que devemos ter $a_1 = \dots = a_k = a_{k+1} = \dots = a_{2k}$. É também evidente que, se os números forem todos iguais, então a igualdade ocorre (verifique!). Logo, por indução temos (7.10) verdadeira, com a condição para a igualdade dada no enunciado, sempre que n for uma potência de 2.

Provemos agora, por indução forte, que a desigualdade é verdadeira em geral, ocorrendo a igualdade se, e só se, os números forem todos iguais. Para tanto, seja $n > 1$ natural e $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais positivos dados. Tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k > n$. Aplicando a desigualdade entre as médias aos n números $a_1, a_2, \dots, a_n$, juntamente com $2^k - n$ cópias do número $a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ (totalizando $n + (2^k - n) = 2^k$ números), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_n + a + \dots + a}{2^k} &\geq \sqrt[2^k]{a_1 \dots a_n \cdot a^{2^k - n}} \\ &= \sqrt[2^k]{a^n a^{2^k - n}} = \sqrt[2^k]{a^{2^k}} = a. \end{aligned}$$

A partir daí, segue que $a_1 + a_2 + \dots + a_n + (2^k - n)a \geq 2^k a$ ou, ainda,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Para haver igualdade, segue da primeira parte que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a = \dots = a$. Em particular, todos os números $a_1, a_2, \dots, a_n$ devem ser iguais. Finalmente, é fácil ver que se esses números forem todos iguais, então haverá igualdade. ■

O corolário a seguir generaliza o item (b) do exemplo 7.4. Para uma prova alternativa do mesmo, veja o problema 22, página 176.

Corolário 7.11. Para $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$, temos

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2, \tag{7.11}$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Prova. Aplicando duas vezes a desigualdade entre as médias, temos

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \\ &\geq (n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n})\left(n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}}\right) = n^2. \end{aligned}$$

Para haver a igualdade, devemos ter $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, donde $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Reciprocamente, é imediato verificar que se todos os números forem iguais, então teremos igualdade em (7.11). ■

A seguir, ilustramos a utilização da desigualdade entre as médias em dois exemplos.

Exemplo 7.12 (Israel-Hungria). Sejam k e n inteiros positivos, com $n > 1$. Prove que

$$\frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \dots + \frac{1}{kn+n-1} > n\left(\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}} - 1\right).$$

Prova. Basta ver que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{kn+j} + n &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{kn+j} + 1\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{kn+j+1}{kn+j} \\ &> n\sqrt[n]{\prod_{j=0}^{n-1} \frac{kn+j+1}{kn+j}} = n\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}}, \end{aligned}$$

onde aplicamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica uma vez. Note que, como os números $(kn+j+1)/(kn+j)$ são dois a dois distintos, não há igualdade, razão do sinal $>$ acima. ■

Exemplo 7.13 (APMO). Se a, b e c são reais positivos, prove que

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Prova. Desenvolvendo o primeiro membro, obtemos

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) = 2+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c},$$

donde basta mostrarmos que

$$\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Denotando por S o primeiro membro da expressão acima, segue da desigualdade entre as médias e do corolário tal que

$$\begin{aligned} S &= (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3 \\ &= \frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3 \\ &\geq \frac{2}{3}(a+b+c)\left(\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\right)+\frac{1}{3}\cdot 9-3 \\ &= \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}. \end{aligned}$$

■

Problemas – Seção 7.2

1. * Generalize o item (a) do exemplo 7.4. Mais precisamente, prove que, se x é um número real não nulo, então $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 2$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $|x|=1$.

2. Para a, b reais positivos, prove que $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a} \geq a^2+b^2$. Quando ocorre a igualdade?

3. Dados números reais $a < b < c$, prove que a equação

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

tem exatamente duas raízes reais e distintas.

4. (OBM.) Sejam a, b, c reais positivos dados. Prove que

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

5. Dispomos de uma folha de cartolina de 2m por 3m e queremos construir com a mesma uma caixa aberta com o maior volume possível. Quais devem ser as dimensões da caixa? Justifique sua resposta.

6. (Estados Unidos.) Prove que, para todos a, b, c reais positivos, tem-se

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Para os dois problemas a seguir o leitor precisará de um pouco de Geometria Euclidiana Plana. Mais precisamente (cf. figura 7.2), sendo $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ e $c=\overline{AB}$ os comprimentos dos lados de um triângulo ABC, existem $x, y, z > 0$ tais que $a=y+z$, $b=x+z$ e $c=x+y$: basta tomar x, y e z como sendo iguais aos comprimentos dos segmentos determinados sobre os lados de ABC pelos pontos de tangência com os mesmos do círculo inscrito em ABC (provaremos tais afirmações em detalhe no volume 2). No contexto de desigualdades envolvendo os lados a, b e c de um triângulo, a substituição dos mesmos respectivamente por $y+z$, $x+z$ e $x+y$ é conhecida como a **transformação de Ravi.**
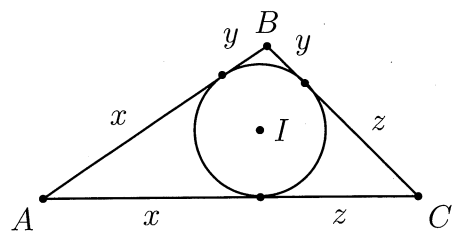
Figura 7.2: a transformação de Ravi.

7. (IMO.) Se a, b, c são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

8. Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo. Prove que

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

9. (Baltic Way.) Sejam a, b, c, d reais positivos dados. Prove que

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4.$$

10. Se $0 < x \neq 1$ e n é um inteiro positivo, prove que

$$\frac{1-x^{2n+1}}{1-x} \geq (2n+1)x^n.$$

11. (Inglaterra.) Prove que $3a^4 + b^4 \geq 4a^3b$, para todos os reais não nulos a e b, ocorrendo a igualdade se, e só se, $|a| = |b|$ e $ab > 0$.

12. * Prove diretamente, i.e., sem apelar para a desigualdade (7.9), que $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

13. (União Soviética.) Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$(ab+ac+bc)^2 \geq 3abc(a+b+c).$$

14. (União Soviética.) Se $x, y, z > 0$, prove que

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}.$$

15. Sejam a e b reais positivos dados. Prove que

$$9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)^3.$$

16. Dados reais positivos a, b e c, prove que

$$a^4(1+b^4) + b^4(1+c^4) + c^4(1+a^4) \geq 6a^2b^2c^2,$$

com igualdade se, e só se, $|a| = |b| = |c| = 1$.

17. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos dados. Prove que

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

18. Sejam $n > 1$ um inteiro ímpar e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais negativos. Mostre que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, todos os a_i forem iguais.

19. (BMO.) Prove que, para todo n natural, tem-se:

(a) $(n+1)^n \geq 2^n n!$.

(b) $(n+1)^n (2n+1)^n \geq 6^n (n!)^2$.

20. (Eslovênia.) Sejam dados $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, com $x > 0$. Prove que

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1) \geq m!\, x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}}.$$

21. (Polônia.) Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são reais positivos com soma igual a S, prove que

$$\frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + \cdots + \frac{S}{S-x_n} \geq \frac{n^2}{n-1},$$

com igualdade se, e só se, todos os x_i forem iguais.

22. O propósito deste problema é apresentar uma segunda demonstração da desigualdade (7.11), a qual não faz uso da desigualdade (7.10). Para tanto, faça os dois itens a seguir:

(a) Mostre que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = n + \sum_{i<j}\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right).$$

(b) Aplique a desigualdade entre as médias para cada uma das parcelas $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}$ do somatório acima e obtenha (7.11).

23. Prove a **desigualdade ponderada entre as médias**: sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos e $k_1, k_2, \ldots, k_n$ inteiros positivos com soma dos inversos igual a 1. Prove que

$$\frac{a_1^{k_1}}{k_1} + \frac{a_2^{k_2}}{k_2} + \cdots + \frac{a_n^{k_n}}{k_n} \geq a_1 a_2 \ldots a_n,$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. (Observe que o caso $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = \frac{1}{n}$ corresponde à desigualdade usual entre as médias aritmética e geométrica.)

24. (Romênia.) Sejam $n > 1$ inteiro e $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ reais dados. Prove que

$$\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n} \leq \frac{n}{a_1} + \frac{n-1}{a_2 - a_1} + \frac{n-2}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n - a_{n-1}}.$$

Sob que condições a igualdade ocorre?

25. (China.) Para a, b e c reais positivos, prove que

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leq \sqrt[3]{a\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}.$$

7.3 A desigualdade de Cauchy

Ainda como aplicação das ideias da seção anterior, suponha dados um inteiro $n > 1$ e números reais a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3, tais que $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ e $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$. Como $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $|x| = |y|$, temos

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &\geq |a_1 b_1|, \\ a_2^2 + b_2^2 &\geq |a_2 b_2|, \\ a_3^2 + b_3^2 &\geq |a_3 b_3|, \end{aligned} \tag{7.12}$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $|a_1| = |b_1|$, $|a_2| = |b_2|$, $|a_3| = |b_3|$. Somando membro a membro as desigualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) &= (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2) \\ &\geq 2(|a_1 b_1| + |a_2 b_2| + |a_3 b_3|) \\ &\geq 2|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade aplicamos a desigualdade triangular para três números, (7.3).

Portanto, segue de $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ e $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$ que

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq 1.$$

A igualdade ocorre se, e só se, tivermos igualdade tanto nas três desigualdades (7.12) quanto na desigualdade triangular utilizada, i.e., se, e só se, $|a_1| = |b_1|$, $|a_2| = |b_2|$ e $|a_3| = |b_3|$ e, além disso, a_1b_1, a_2b_2, $a_3b_3 \geq 0$ ou a_1b_1, a_2b_2, $a_3b_3 \leq 0$. Mas é imediato verificar que tais condições são equivalentes a $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ e $a_3 = b_3$.

Considere agora números reais a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 quaisquer, exceto pelo fato de que pelo menos um dos números a_1, a_2, a_3 e pelo menos um dos números b_1, b_2, b_3 são não nulos. Para c real positivo, defina $x_i = \frac{a_i}{c}$, $1 \leq i \leq 3$. Como

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{c^2},$$

temos

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \Leftrightarrow c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Analogamente, sendo $y_i = \frac{b_i}{d}$ para $1 \leq i \leq 3$, onde $d = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, temos $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$. Portanto, segue da conclusão do penúltimo parágrafo que

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3| \leq 1,$$

com igualdade se, e só se, $x_i = y_i$ para $1 \leq i \leq 3$.

Substituindo as definições de x_i e y_i na desigualdade acima e notando que $c, d > 0$, concluímos que a desigualdade acima equivale a

$$\frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{cd} \leq 1,$$

onde $c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $d = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$. Ademais, há igualdade se, e só se, $a_i = \frac{c}{d} b_i$ para $1 \leq i \leq 3$. Por fim, note que a última desigualdade acima é equivalente a

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq cd = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

A discussão acima essencialmente estabeleceu, para $n = 3$, a desigualdade do teorema a seguir, conhecida como a **desigualdade de Cauchy**.
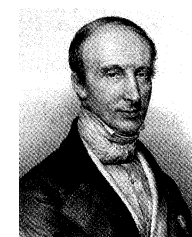
Figura 7.3: Augustin Louis Cauchy, um dos maiores matemáticos do século XIX, e talvez da história. Cauchy foi um dos precursores no estudo da Análise Matemática, área de pesquisa extremamente importante em matemática superior. Ele também tem seu nome associado a muitos resultados de Física-Matemática.

Teorema 7.14 (Cauchy). Sejam $n > 1$ um inteiro e $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais dados. Então

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_jb_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}, \tag{7.13}$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, os a_i e os b_i forem respectivamente *proporcionais*, i.e., se, e só se, existir um real não nulo λ tal que

$$a_1 = \lambda b_1, \ a_2 = \lambda b_2, \ \ldots, \ a_n = \lambda b_n.$$

Prova. Se todos os a_i ou todos os b_i forem iguais a zero, nada há a fazer. Senão, a fim de estabelecer (7.13), basta seguir os passos do caso particular $n = 3$ discutido acima, tomando somente o cuidado de,

quando conveniente, utilizar (7.4) em vez de (7.3) (veja o problema 2, página 182). ■

Daremos outra prova para a desigualdade de Cauchy posteriormente nestas notas, como aplicação da teoria de máximos e mínimos de funções quadráticas. Daremos uma interpretação geométrica para a desigualdade de Cauchy para $n = 2$ na seção 6.3 do volume 2 (cf. problema 6.3.2).

Os dois exemplos a seguir ilustram a utilização da desigualdade de Cauchy.

Exemplo 7.15. Sejam a, b, c números reais dados. Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2+z^2)+a^2+b^2+c^2=6 \\ ax+by+cz=2 \end{cases}$$

não possui soluções reais x, y, z.

Prova. Supondo o contrário, teríamos pela desigualdade de Cauchy que

$$4=(ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

Assim, sendo $u = a^2+b^2+c^2$ e $v = x^2+y^2+z^2$, teríamos $u+3v=6$ e $uv \ge 4$. Neste ponto, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica nos daria

$$6 = u+3v \ge 2\sqrt{u\cdot 3v} = 2\sqrt{3uv} = 2\sqrt{3\cdot 4} = 4\sqrt{3},$$

claramente um absurdo. ■

Exemplo 7.16 (Romênia). Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ reais positivos tais que $x_1+x_2+\cdots+x_n = x_{n+1}$. Prove que

$$\sqrt{x_1(x_{n+1}-x_1)}+\cdots+\sqrt{x_n(x_{n+1}-x_n)} \le$$
$$\le \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1}-x_1)+\cdots+x_{n+1}(x_{n+1}-x_n)}.$$

Prova. Para $1 \le j \le n$ seja $y_j = x_{n+1} - x_j$. Pela desigualdade de Cauchy, temos

$$\sqrt{x_1y_1}+\cdots+\sqrt{x_ny_n} \le \sqrt{x_1+\cdots+x_n}\sqrt{y_1+\cdots+y_n}$$
$$= \sqrt{x_{n+1}}\sqrt{(x_{n+1}-x_1)+\cdots+(x_{n+1}-x_n)}. ■$$

Para uso futuro, registremos o seguinte corolário da desigualdade de Cauchy.

Corolário 7.17. Dados números reais $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$, temos

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n}b_j^2}, \quad (7.14)$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ forem positivamente proporcionais, i.e., se, e só se, existir um real *positivo* λ, tal que $a_i = \lambda b_i$ para $1 \le i \le n$.

Prova. Façamos a prova para $n = 3$, sendo o caso geral inteiramente análogo. Uma vez que ambos os membros de (7.14) são números reais não-negativos, basta mostrar que o quadrado do primeiro membro é menor ou igual que o quadrado do segundo membro, i.e., que

$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2 \le \left(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\right)^2.$$

Desenvolvendo todos os quadrados $(a_i+b_i)^2$, segue que o quadrado do primeiro membro é igual a

$$(a_1^2+2a_1b_1+b_1^2)+(a_2^2+2a_2b_2+b_2^2)+(a_3^2+2a_3b_3+b_3^2).$$

Analogamente, o quadrado do segundo membro é igual a

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+2\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}+(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

Mas como em ambas as expressões temos a parcela $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$, a desigualdade do enunciado é equivalente a

$$2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \leq 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

a qual é precisamente a desigualdade de Cauchy.

A dedução das condições para a igualdade fica a cargo do leitor. ■

Para $n = 1$ e fazendo $a_1 = a$, $b_1 = b$, a desigualdade do corolário anterior se reduz a $\sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$, ou, o que é o mesmo, $|a + b| \leq |a| + |b|$. Por essa razão, a desigualdade (7.14) também é conhecida como a **desigualdade triangular**.

Problemas – Seção 7.3

1. Dados números reais x e y tais que $3x+4y = 12$, calcule o menor valor possível de $x^2 + y^2$.

2. Prove o caso geral (7.13) da desigualdade de Cauchy.

3. Dados reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, definimos sua média *quadrática* como o número

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Prove a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \qquad (7.15)$$

com igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

4. Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 reais positivos. Prove que

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq 4} \frac{a_i^2 + a_j^2 + a_k^2}{a_i + a_j + a_k} \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

5. Use a desigualdade de Cauchy para dar uma terceira demonstração da desigualdade (7.11).

6. (Leningrado.) Dados reais positivos a, b, c e d, prove que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

7. (OIM.) Sejam x, y e z números reais positivos com soma igual a 3. Prove que

$$3\sqrt[3]{9} < \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3} + \sqrt{2z+3} \leq 3\sqrt{5}.$$

Quando a segunda desigualdade vira uma igualdade?

8. Seja $n > 2$ inteiro. Prove que

$$\sqrt{\binom{n}{1}} + \sqrt{\binom{n}{2}} + \cdots + \sqrt{\binom{n}{n}} \leq \sqrt{n(2^n - 1)}.$$

9. (União Soviética - adaptado.) Se $x, y, z > 0$, use a desigualdade de Cauchy para provar que

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $x = y = z$.

10. (APMO.) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais positivos dados, tais que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Mostre que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

11. (Torneio das Cidades.) Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ reais positivos dados. Prove que
$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geq (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n).$$

12. (APMO.) Sejam a, b, c as medidas dos lados de um triângulo. Mostre que
$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$
e explique quando ocorre a igualdade.

13. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reais positivos dados. Mostre que
$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4\right).$$

14. (IMO.) Sejam a, b e c reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

7.4 Mais desigualdades

Esta seção é devotada ao estudo de outras desigualdades elementares importantes. A primeira das que apresentaremos remonta os

irmãos Bernoulli[5], sendo conhecida como a **desigualdade de Bernoulli**. Apesar de sua aparente simplicidade, veremos que ela se revela bastante útil em aplicações.

Proposição 7.18 (Bernoulli). Dados n natural e $x > -1$ real, temos
$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$
ocorrendo a igualdade para $n > 1$ se, e só se, $x = 0$.

Prova. Façamos indução sobre n, sendo o caso $n = 1$ imediato. Suponha, por hipótese de indução, que $(1+x)^k \geq 1+kx$; como $1+x > 0$, temos
$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x,\end{aligned}$$
ocorrendo a igualdade se, e só se, $(1+x)^k = 1 + kx$ e $kx^2 = 0$, i.e., se, e só se, $x = 0$. ■

Exemplo 7.19. Dados n natural e a e b reais positivos, mostre que
$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1},$$
ocorrendo a igualdade se, e só se, $a = b$.

Prova. Dividindo ambos os membros da desigualdade do enunciado por 2^n, vemos que basta provar que
$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{b}{2a}\right)^n \geq 2.$$

Como $-\frac{1}{2} + \frac{a}{2b} > -1$ e $-\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} > -1$, aplicando a desigualdade de Bernoulli a cada parcela do primeiro membro acima e somando os resultados, obtemos
$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{b}{2a}\right)^n \geq 2 + n\left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - 1\right).$$

[5] Jacob e Johann Bernoulli, matemáticos suíços do século XVIII.

Basta, agora, aplicar a desigualdade entre as médias para obter

$$\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-1\geq 2\sqrt{\frac{a}{2b}\cdot\frac{b}{2a}}-1=0,$$

com igualdade se, e só se, $\frac{a}{2b}=\frac{b}{2a}$, i.e., se, e só se, $a=b$. ■

A continuação, apresentamos uma desigualdade conhecida na literatura como a **desigualdade de Chebyshev**[6].

Teorema 7.20 (Chebyshev)**.** Se a_1, a_2, ..., a_n e b_1, b_2, ..., b_n são números reais tais que

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n \text{ e } b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n,$$

então

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ib_i,$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1=a_2=\cdots=a_n$ ou $b_1=b_2=\cdots=b_n$.

Prova. Temos de mostrar que

$$n\sum_{i=1}^n a_ib_i-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)\geq 0,$$

para o quê basta observar que a expressão do primeiro membro é igual a

$$\sum_{i,j=1}^n (a_i-a_j)(b_i-b_j)\geq 0$$

(uma vez que os a_i's e b_i's são igualmente ordenados).

Note agora que, se $a_1=a_2=\cdots=a_n$ ou $b_1=b_2=\cdots=b_n$, então haverá igualdade na desigualdade de Chebyshev. Reciprocamente,

[6]Após Pafnuty Chebyshev, matemático russo do século XIX.

suponha que temos igualdade em tal desigualdade. Como $(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geq 0$ para todos os índices i,j, para haver igualdade devemos ter $(a_i-a_j)(b_i-b_j)=0$ para todos $i,j=1,\ldots,n$. Se existisse $1\leq k\leq n$ tal que $b_k<b_{k+1}$, então $b_1\leq\cdots\leq b_k<b_{k+1}\leq\cdots\leq b_n$, e a condição $(a_i-a_{k+1})(b_i-b_{k+1})=0$ para todo i garante que $a_i=a_{k+1}$ para $i\leq k$. Portanto, temos $a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}$. Por outro lado, a partir de $(a_i-a_k)(b_i-b_k)=0$ para $i>k$, concluímos que $a_{k+1}=\cdots=a_n$. Logo, todos os a_i's devem ser iguais. ■

O corolário a seguir encerra uma importante consequência da desigualdade de Chebyshev.

Corolário 7.21. Se k é um natural e a_1, a_2, ..., a_n são reais positivos, então

$$\frac{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k}{n}\geq\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^k, \tag{7.16}$$

com igualdade se, e só se, todos os a_i's forem iguais.

Prova. Façamos indução sobre $k\geq 1$, sendo (7.16) trivialmente verdadeira para $k=1$ e todos os a_1, a_2, ..., a_n reais positivos. Agora, seja $l>1$ um natural tal que (7.16) valha para $k=l-1$ e todos $a_1,a_2,\ldots,a_n$ reais positivos. Dados reais positivos a_1, a_2, ..., a_n, como ambos os membros da desigualdade que queremos provar são invariantes por permutações dos índices $1,2,\ldots,n$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$. Daí, temos $a_1^{l-1}\leq a_2^{l-1}\leq\cdots\leq a_n^{l-1}$, e segue da desigualdade de Chebyshev que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^l\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^{l-1}\right).$$

Por outro lado, a hipótese de indução fornece

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^{l-1}\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)^{l-1},$$

e combinando essas duas desigualdades obtemos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^l \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^l,$$

conforme desejado. Por fim, a condição de igualdade é óbvia a partir condição de igualdade na desigualdade de Chebyshev. ∎

No que segue, colecionamos algumas aplicações interessantes da desigualdade de Chebyshev.

Exemplo 7.22 (Polônia). Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos com soma s. Prove que

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Prova. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Então $s - a_1 \geq s - a_2 \geq \cdots \geq s - a_n$. Como $s - a_i > 0$ para todo i, segue que $\frac{1}{s-a_1} \leq \frac{1}{s-a_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{s-a_n}$. Portanto, pela desigualdade de Chebyshev temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} &= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \cdot \frac{1}{s-a_i}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-a_i}\right) \\ &= \frac{s}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-a_i}\right).\end{aligned} \tag{7.17}$$

Mas, pelo corolário 7.11, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(s-a_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-a_i}\right) \geq n^2$$

ou, ainda,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-a_i} \geq \frac{n^2}{(n-1)s}. \tag{7.18}$$

Por fim, combinando as desigualdades (7.17) e (7.18) chegamos à desigualdade desejada. ∎

Exemplo 7.23 (Turquia). Sejam $n > 1$ inteiro e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos tais que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Encontre o valor mínimo da expressão

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^5}{x_1 + \cdots + \widehat{x_i} + \cdots + x_n},$$

onde o circunflexo sobre x_i indica que o denominador da i–ésima parcela contém todos os reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à exceção de x_i.

Prova. Seja s a soma dos x_i's e suponha, sem perda de generalidade, que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Então $x_1^2 \leq x_2^2 \leq \cdots \leq x_n^2$ e $\frac{1}{s-x_1} \leq \frac{1}{s-x_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{s-x_n}$.

A expressão a ser minimizada pode ser escrita como

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-x_i} \cdot x_i^5,$$

de modo que, aplicando a desigualdade de Chebyshev duas vezes, juntamente com a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética e o corolário 7.11, obtemos

$$\begin{aligned} S &\geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^5\right) \\ &\geq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) \\ &\geq \frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \\ &\geq \frac{s}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-x_i}\right) \geq \frac{s}{n^3}\cdot n^2\left(\sum_{i=1}^{n}(s-x_i)\right)^{-1} \\ &= \frac{s}{n}\cdot\frac{1}{n(n-1)s} = \frac{1}{n^2(n-1)}.\end{aligned}$$

Para garantirmos que $\frac{1}{n^2(n-1)}$ é o menor valor possível, devemos mostrar que ele sempre é atingido. Para tanto basta vermos que, como $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, a condição de igualdade na desigualdade de Chebyshev impõe que seja $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, e com tais valores todas as desigualdades utilizadas se tornam igualdades. ■

A próxima desigualdade que apresentamos é conhecida como a **desigualdade do rearranjo**.

Proposição 7.24. Sejam $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ reais positivos dados. Se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma permutação qualquer de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, então

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2,$$

ocorrendo a igualdade na primeira (resp. segunda) desigualdade acima se, e só se, $x_i = a_{n-i}$ (resp. $x_i = a_i$) para $1 \leq i \leq n$.

Prova. Mostremos como maximizar a soma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, sendo o raciocínio para minimizá-la totalmente análogo.

Como o número de permutações $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dos a_i's é finito, há pelo menos uma delas que maximiza a soma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. Se $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ é uma tal permutação, queremos mostrar que $b_i = a_i$ para $1 \leq i \leq n$, e para tanto basta mostrarmos que deve ser $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. Suponha o contrário, i.e., que existam índices $i < j$ tais que $b_i > b_j$. Defina a permutação $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ dos a_i's pondo

$$b'_k = \begin{cases} b_k, & \text{se } k \neq i, j \\ b_i, & \text{se } k = j \\ b_j, & \text{se } k = i \end{cases}.$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i b'_i - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= (a_i b'_i + a_j b'_j) - (a_i b_i + a_j b_j) \\ &= (a_i b_j + a_j b_i) - (a_i b_i + a_j b_j) \\ &= (a_i - a_j)(b_j - b_i) > 0. \end{aligned}$$

Isso é o mesmo que

$$a_1b'_1 + a_2b'_2 + \cdots + a_nb'_n > a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

o que por sua vez contraria o fato de que a permutação $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dos a_i's maximiza a soma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ máximo. Logo, $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. ■

Exemplo 7.25. Dados a, b e c reais positivos, mostre que:

(a) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

(b) $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Prova.
(a) Suponha, sem perda de generalidade, que $a \leq b \leq c$. Uma aplicação direta da desigualdade do rearranjo nos dá

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c \geq a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a.$$

(b) Podemos novamente supor, sem perda de generalidade, que $a \leq b \leq c$. A desigualdade a ser provada é equivalente a

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2.$$

Mas $a \leq b \leq c$ implica em $ab \leq ac \leq bc$. Portanto, aplicando a desigualdade do rearranjo, obtemos

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 = ab \cdot ac + ab \cdot bc + ac \cdot bc \leq (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2. \ ■$$

Uma ideia muito útil em certos tipos de problemas de desigualdades é tentar utilizar um argumento similar ao apresentado na prova da desigualdade do rearranjo como técnica de argumentação. Colocamos tal ideia em prática no exemplo a seguir.

Exemplo 7.26 (Taiwan). Seja $n > 2$ inteiro. Calcule o maior valor possível da expressão

$$\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j (x_i + x_j),$$

sobre todas as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de reais positivos tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

Solução. Denote

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j (x_i + x_j)$$

e observe que, sem perda de generalidade, podemos supor $x_1 \ge \cdots \ge x_n \ge 0$. Mostremos que

$$E(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} + x_n, 0) \ge E(x_1, \ldots, x_n). \qquad (7.19)$$

Para tanto, ponha $y_j = x_j$ para $1 \le j < n-1$, $y_{n-1} = x_{n-1} + x_n$, $y_n = 0$ e note que $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$. Por simplicidade de notação, denotando por ΔE a diferença

$$\Delta E = E(y_1, \ldots, y_n) - E(x_1, \ldots, x_n),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta E \;=\; & \sum_{1 \le i < j \le n-2} y_i y_j (y_i + y_j) + \sum_{i=1}^{n-2} y_i y_{n-1} (y_i + y_{n-1}) \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} y_i y_n (y_i + y_n) - \sum_{1 \le i < j \le n-2} x_i x_j (x_i + x_j) \\
& + \sum_{1 \le i < j \le n-2} x_i x_{n-1} (x_i + x_{n-1}) - \sum_{1 \le i < j \le n-1} x_i x_n (x_i + x_n)
\end{aligned}$$

Levando em conta a definição dos y_i's, temos então que

$$\begin{aligned}
\Delta E \;=\; & \sum_{i=1}^{n-2} x_i (x_{n-1} + x_n)(x_i + x_{n-1} + x_n) \\
& - \sum_{i=1}^{n-2} x_i x_{n-1} (x_i + x_{n-1}) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n (x_i + x_n) \\
=\; & \sum_{i=1}^{n-2} [x_i (x_{n-1} + x_n)(x_i + x_{n-1} + x_n) - x_i x_{n-1} (x_i + x_{n-1}) \\
& - x_i x_n (x_i + x_n)] - x_{n-1} x_n (x_{n-1} + x_n) \\
=\; & \sum_{i=1}^{n-2} 2 x_i x_{n-1} x_n - x_{n-1} x_n (x_{n-1} + x_n) \\
=\; & x_{n-1} x_n (2x_1 + \cdots + 2x_{n-2} - x_{n-2} - x_n).
\end{aligned}$$

Mas, como $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge 0$ e $n \ge 3$, segue que

$$\begin{aligned}
2x_1 + \cdots + 2x_{n-2} - x_{n-1} - x_n \;&\ge\; 2x_1 - x_{n-1} - x_n \\
&=\; x_1 - x_{n-1} + x_1 - x_n \ge 0,
\end{aligned}$$

o que por sua vez estabelece (7.19).

Assim, para maximizar $E(x_1, \ldots, x_n)$ podemos nos restringir às sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nas quais $x_n = 0$. Repetindo o raciocínio acima várias vezes, concluímos que para maximizar $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ podemos supor que $x_i = 0$ para $i > 2$. Mas, como a operação acima descrita não muda a soma dos x_i's, concluímos que basta maximizar a expressão $x_1 x_2 (x_1 + x_2)$, onde $x_1, x_2 \ge 0$ e $x_1 + x_2 = 1$, o que é imediato:

$$x_1 x_2 (x_1 + x_2) = x_1 x_2 \le \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$E(x_1, \ldots, x_n) \le E(1/2, 1/2, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{4}. \qquad \blacksquare$$

Nossa última desigualdade é devida ao matemático norueguês do século XIX N. H. Abel, sendo conhecida como a **desigualdade de Abel**.

Teorema 7.27 (Abel). Sejam $n > 1$ natural e a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n números reais dados, com $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$. Se M e m denotam, respectivamente, os elementos máximo e mínimo do conjunto de somas $\{b_1, b_1 + b_2, \ldots, b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$, então

$$ma_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq Ma_1.$$

Prova. Provemos a desigualdade da direita, sendo a prova da desigualdade da esquerda totalmente análoga.

Faça $s_0 = 0$ e $s_i = b_1 + \cdots + b_i$ para $1 \leq i \leq n$. Então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i(s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_is_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}s_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})s_i + a_ns_n \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} M(a_i - a_{i+1}) + Ma_n = Ma_1.\end{aligned}$$

■

Para referência futura, observamos que, nas notações da prova do teorema acima, a igualdade

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})s_i + a_ns_n \tag{7.20}$$

é conhecida como a **identidade de Abel**, sendo quase tão útil quanto a desigualdade de Abel em si.

Terminemos esta seção apresentando uma belíssima aplicação da desigualdade de Abel, na qual utilizaremos também o fato de que todo conjunto com k elementos possui exatamente 2^k subconjuntos distintos. Para uma prova deste último fato, referimos o leitor ao problema 22, página 139, ou, ainda, ao teorema 1.12 do volume 4.

Exemplo 7.28 (Romênia). Faça os seguintes itens:

(a) Sejam $n > 1$ inteiro e $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ reais positivos tais que $x_1y_1 < x_2y_2 < \cdots < x_ny_n$ e, para $1 \leq k \leq n$, $x_1 + \cdots + x_k \geq y_1 + \cdots + y_k$. Prove que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n}.$$

(b) Se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é um conjunto de inteiros positivos, tal que dois quaisquer de seus subconjuntos têm somas de elementos distintas, prove que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

Prova.

(a) Inicialmente, observe que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - y_i}{x_iy_i}. \tag{7.21}$$

Por outro lado, a condição $x_1 + \cdots + x_k \geq y_1 + \cdots + y_k$ para $1 \leq k \leq n$ pode ser escrita como

$$(x_1 - y_1) + \cdots + (x_k - y_k) \geq 0$$

para $1 \leq k \leq n$. Assim, fazendo $a_i = \frac{1}{x_iy_i}$ e $b_i = x_i - y_i$ para $1 \leq i \leq n$, temos $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$, $b_1 + \cdots + b_i \geq 0$ e $\frac{x_i - y_i}{x_iy_i} = a_ib_i$, para $1 \leq i \leq n$.

Aplicando a desigualdade de Abel a (7.21), obtemos então

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq a_n \cdot \min\{b_1 + \cdots + b_i;\ 1 \leq i \leq n\} \geq 0.$$

(b) Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ e seja $B_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$ para $1 \leq k \leq n$. A hipótese feita sobre o

conjunto A garante que todos os 2^k-1 subconjuntos não-vazios de B_k têm somas distintas de elementos. Mas, como cada uma dessas somas é um número natural e $a_1+\cdots+a_k$ é a maior delas, concluímos que

$$a_1+\cdots+a_k \geq 2^k-1.$$

Observando, agora, que $2^k-1=2^0+2^1+\cdots+2^{k-1}$, temos que

$$a_1+a_2+\cdots+a_k \geq 2^0+2^1+\cdots+2^{k-1},$$

para $1 \leq k \leq n$. Por outro lado, é óbvio que

$$2^0a_1 < 2^1a_2 < \cdots < 2^{n-1}a_n,$$

de modo que a desigualdade do item (a) fornece

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 2. \qquad \blacksquare$$

Para uma outra prova do item (b) do exemplo acima, veja o exemplo 3.18 do volume 4.

Problemas – Seção 7.4

1. Para $n \in \mathbb{N}$, prove que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

2. (Estados Unidos.) Para m, n naturais, seja $a=\frac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$. Prove que

$$a^m+a^n \geq m^m+n^n.$$

3. Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$

4. (OIM.) Encontre todas as soluções reais positivas do sistema de equações

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{1994}=1994 \\ x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{1994}^4=x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{1994}^3 \end{cases}.$$

5. Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 reais positivos. Prove que

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq 4} \frac{a_i^3+a_j^3+a_k^3}{a_i+a_j+a_k} \geq a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2,$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $a_1=a_2=a_3=a_4$.

6. Sejam $n>1$ inteiro e $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais dados, com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Se $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ são reais positivos com soma igual a 1, prove que

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i b_i$$

e dê condições necessárias e suficientes para a igualdade. A que caso particular corresponde a desigualdade de Chebyshev?

7. Sejam a, b, c, d reais não negativos tais que $ab+bc+cd+da=1$. Prove que

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

8. Para a, b, c reais positivos e $n \in \mathbb{N}$, prove que

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}.$$

9. Sejam x, y e z reais positivos tais que $xyz = 1$. Prove que

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

10. (Índia.) Sejam $n > 1$ inteiro e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos dados, com soma igual a 1. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}.$$

11. (Eslovênia.) Dados $2n$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, como devemos arranjá-los em pares de modo que a soma dos n produtos dos números de cada par seja máxima?

12. (IMO.) Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma sequência de inteiros positivos dois a dois distintos. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

13. Faça os seguintes itens:

    (a) Se $x < y$ são reais positivos dados e $a = \frac{x+y}{2}$, prove que $a(x+y-a) \geq xy$.

    (b) Use o item (a) para fornecer uma outra prova da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

14. (Torneio das Cidades.) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos dados. Prove que

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \cdots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geq \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k).$$

15. (Taiwan.) Sejam $n \geq 3$ inteiro e x_1, x_2, $\ldots$, x_n reais não negativos cuja soma é igual a 1. Prove que:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_4 + \cdots + x_n^2 x_1 \leq \frac{4}{27}.$$

16. Se a, b, c e d são reais não-negativos tais que $a \leq 1$, $a + b \leq 5$, $a + b + c \leq 14$ e $a + b + c + d \leq 30$, use a desigualdade de Abel para provar que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 10.$$

17. Sejam a_i, b_i números reais tais que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_1 > 0$ e $b_1 \geq a_1$, $b_1 b_2 \geq a_1 a_2$, $\ldots$, $b_1 b_2 \ldots b_n \geq a_1 a_2 \ldots a_n$. Mostre que

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

CAPÍTULO 8

Soluções e Sugestões

Seção 1.1

1. Escreva $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = r$, obtendo $a = br$, $c = dr$ e, em seguida, $a \pm c = r(b \pm d)$.

2. Seja $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ e suponha que a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ seja periódica, como em (1.3), digamos. Se $y \in \mathbb{N}$ é o inteiro com representação decimal $b_1b_2\ldots b_p$, conclua, a partir daí, que $10^{l+p}x = y + 10^l x$, de sorte que $x = \frac{y}{10^{l+p} - 10^p}$, um número racional. Reciprocamente, seja $x = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$ e $0 < a \leq b$. Se $y_k \in \mathbb{N}$ é o inteiro com representação decimal $a_1a_2\ldots a_k$, use o algoritmo da divisão para concluir que $10^k a = by_k + r_k$, com $0 \leq r_k < b$. Em seguida, use o fato de que só há um número finito de possibilidades para r_k para concluir pela existência de naturais l e p, tais que $r_{l+p} = r_l$. A partir daí, conclua que a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é da forma (1.3), com $b_1 = a_{l+1}$, $b_2 = a_{l+2}$, $\ldots$, $b_p = a_{l+p}$.

3. Imite a prova da unicidade do inverso aditivo, trocando $+$ por $\cdot$ e 0 por 1.

4. Comece observando que $0 = 0 \cdot a = (1 + (-1))a = 1 \cdot a + (-1)a = a + (-1)a$; em seguida, use a unicidade do inverso aditivo.

5. Dentre as representações decimais acima, a única que não corresponde a um número racional é a do item (d); para provar essa última afirmação fato, observe que, na representação decimal em questão, aparecerão sequências arbitrariamente longas de zeros. Para escrever as representações dos itens (a), (b) e (c) como frações irredutíveis, siga os passos delineados na sugestão ao Problema 2.

Seção 1.2

1. Para os itens (b) e (c), utilize (7') e (a); o item (g) decorre dos itens (b) e (c).

2. Comece mostrando que $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} > \frac{1}{5}$.

3. Avalie a diferença $\frac{a+1}{b+1} - \frac{a+2}{b+2}$.

4. Sendo S a soma dos dez números em questão, mostre que $4S$ pode ser escrito como uma soma de dez números reais, cada um dos quais igual à soma de quatro dos dez números dados.

5. Argumente como no exemplo 1.4, utilizando o fato de que $31 < 32 = 2^5$ e $17 > 16 = 2^4$.

6. Para os itens (a) e (b), comece observando que $a^n < b^n$ se, e só se, $\left(\frac{a}{b}\right)^n < 1$; em seguida, aplique o resultado do corolário 1.3. Quanto a (c), comece observando que $a^n + b^n < (a+b)^n$ se, e só se, $\left(\frac{a}{a+b}\right)^n + \left(\frac{b}{a+b}\right)^n < 1$; em seguida, aplique o resultado do corolário 1.3.

7. Use o fato de que $a^3 < c \cdot a^2$ e $b^3 < c \cdot b^2$ e, em seguida, aplique o teorema de Pitágoras – cf. item (c) da proposição 4.9 do volume 3.

8. A desigualdade do enunciado equivale a $\left(\frac{1}{7}\right)^n + \left(\frac{4}{7}\right)^n + \left(\frac{9}{7}\right)^n \geq 2$. Esta última desigualdade é trivial para $n = 1$ ou $n = 2$; para $n \geq 3$, aplique o item (b) do corolário 1.3 para concluir que $\left(\frac{9}{7}\right)^n \geq \left(\frac{9}{7}\right)^3 > 2$.

9. Comece observando que, se $a \geq 4$, então $0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$, de sorte que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ não pode ser inteiro.

10. Se $a > 5$ é inteiro, mostre que $4(a-4) > a$; conclua, a partir daí, que não é vantajoso termos parcelas maiores que 5. Em seguida, operando trocas semelhantes, descarte parcelas iguais a 4 ou 5. Por fim, mostre, de maneira análoga, que é mais vantajoso termos mais parcelas iguais a 3 que parcelas iguais a 2.

11. Sendo a o algarismo inicial, conclua inicialmente que existem inteiros não negativos k e l tais que $a \cdot 10^k < 2^n < (a+1) \cdot 10^k$ e $a \cdot 10^l < 5^n < (a+1) \cdot 10^l$; em seguida, multiplique essas duas desigualdades membro a membro.

12. Suponha que as três desigualdades do enunciado são verdadeiras; a segunda delas implica $(a-d)(c-b) < 0$, de sorte que a primeira delas fornece $a - d < 0 < c - b$. Use, agora, a terceira desigualdade para obter $ad(c-b) < bc(a-d)$ e, do que fizemos anteriormente, deduzir uma contradição.

13. Adapte a demonstração do corolário em questão.

14. Para o item (a), observe que

$$(rs)^n = \underbrace{(rs)\cdots(rs)}_{n} = (\underbrace{r\cdots r}_{n}) \cdot (\underbrace{s\cdots s}_{n}) = r^n s^n.$$

Para os demais itens, argumente de modo análogo.

15. Considere separadamente os casos $m < n$, $m = n$ e $m > n$, aplicando convenientemente o item (b) do problema anterior em cada um deles.

16. Se $b = 2^k \cdot 5^l$ e $n = \max\{k, l\}$, então $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 2^{n-k} \cdot 5^{n-l}}{10^n}$.

17. Se $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$, escreva $x^n = (x^2)^k$ e, em seguida, aplique o item (g) da proposição 1.2. O caso em que n é ímpar pode ser tratado analogamente.

Seção 1.3

2. Para o item (a), por exemplo, mostre que $(\sqrt[n]{xy})^n = xy$ e $(\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y})^n = xy$; em seguida, use a unicidade da raiz n-ésima.

3. Por *contraposição*[1], mostre que, se $b \neq 0$, então r é racional.

4. Reduza este problema ao anterior.

5. Argumente por contraposição.

6. Se $ab \neq 0$, desenvolva $(a + b\sqrt{2})^2 = (-c\sqrt{3})^2$ para concluir que $\sqrt{2}$ seria racional, o que é um absurdo. Portanto, $ab = 0$ e, daí, $a = 0$ ou $b = 0$. Aplique, então, o resultado do Problema 3.

7. Por contradição, suponha que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a e b naturais primos entre si, de maneira que $2b^2 = a^2$. A partir dessa igualdade, mostre que a é par e, daí, que b é par, chegando a uma contradição.

8. Imite a sugestão do problema anterior, trocando 2 por p.

[1]Uma proposição da forma $A \Rightarrow B$ (i.e., *Se A, então B*) pode ser provada de forma *direta*, por *contraposição* ou por *contradição*. No primeiro caso, assumimos a veracidade da asserção A e deduzimos a veracidade da asserção B *diretamente*; no segundo caso, assumimos que a asserção B é *falsa* e deduzimos, diretamente, que a asserção A também é falsa; por fim, no terceiro caso, assumimos que a asserção A é verdadeira e a asserção B é falsa e deduzimos diretamente, a partir daí, uma contradição (i.e., deduzimos que uma asserção obviamente falsa deveria ser verdadeira, o que é impossível de ocorrer). Para uma revisão mais ampla sobre Lógica e métodos de demonstração, sugerimos ao leitor uma das excelentes referências [14] ou [42].

Seção 1.5

1. Para o item (a), suponha, por contradição, que $a > 0$. Então, pela propriedade Arquimediana, podemos escolher $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{a}$, um absurdo. Para o item (b), escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{c-b}{a}$.

2. Para o item (b), suponha que $r_1, \ldots, r_n \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$, com $r_1, \ldots, r_n$ dois a dois distintos. Se $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$, então $r \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$ e, pelo item (a), podemos temos $a < \frac{a+r}{2} < r$. Fazendo $r_{n+1} = \frac{a+r}{2}$, temos então que $r_1, \ldots, r_n, r_{n+1} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$, com $r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}$ dois a dois distintos. Por fim, argumente com números irracionais de maneira análoga, utilizando a segunda parte do item (a).

3. Para o item (a), suponha que temos a validade do resultado quando $a \geq 0$. Se $b \leq 0$, então $-b \geq 0$ e, por (a), existem $r \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tais que $r, \alpha \in (-b, -a)$. Portanto, $-r, -\alpha \in (a, b)$, com $-r \in \mathbb{Q}$ e $-\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Se $a \leq 0 < b$, mostre que basta aplicarmos o resultado que supomos conhecido ao intervalo $(0, b)$. Para o item (b), use a propriedade Arquimediana dos naturais para obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{\sqrt{2}}{b-a}$. Por fim, quanto a (c), comece usando a propriedade Arquimediana para garantir a existência de $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m}{n} > b$ (resp. $\frac{m\sqrt{2}}{n} > b$); em seguida, mostre que se m for o menor natural satisfazendo tal condição, então $m > 1$ e $\frac{(m-1)\sqrt{2}}{n} \in (a, b)$.

4. Adapte os itens (b) e (c) do problema anterior ao caso presente.

5. Use o item (b) do Problema 3.

6. Use o exemplo 1.13, juntamente com a proposição 1.14.

7. Adapte a prova da proposição 1.16 ao caso presente.

Seção 2.1

1. Para (a), basta desenvolver o segundo membro, obtendo

$$\begin{aligned}(x-y)(x+y) &= x(x+y)-y(x+y)\\ &= (x^2+xy)-(xy+y^2)\\ &= x^2-y^2.\end{aligned}$$

Quanto a (b), temos

$$\begin{aligned}(x\pm y)^2 &= (x\pm y)(x\pm y) = x(x\pm y)\pm y(x\pm y)\\ &= (x^2\pm xy)\pm(xy\pm y^2) = x^2\pm 2xy+y^2.\end{aligned}$$

Por fim (c) é também obtido desenvolvendo o segundo membro, o que deixamos a cargo do leitor.

2. Basta observar que

$$\begin{aligned}\frac{m}{np}+\frac{n}{mp}+\frac{p}{mn} &= \frac{m^2+n^2+p^2}{mnp}\\ &= \frac{(m+n+p)^2-2(mn+mp+np)}{mnp}.\end{aligned}$$

3. A condição do enunciado, juntamente com o item (a) da proposição 2.1, fornece

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2 &\Leftrightarrow [b(1-a)]^2-[a(1-b)]^2=0\\ &\Leftrightarrow [b(1-a)-a(1-b)][b(1-a)+a(1-b)=0\\ &\Leftrightarrow (b-a)(a+b-2ab)=0.\end{aligned}$$

Mas, como $a\neq b$, segue que $a+b=2ab$. Daí, obtemos

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{2ab}{ab}=2.$$

4. Aplicando sucessivamente os itens (b) e (a) da proposição 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+2\sqrt{xy}} &= \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{(x-2\sqrt{xy}+y)+2\sqrt{xy}}\\ &= \frac{x^2-y^2}{x^2(x+y)}=\frac{(x-y)(x+y)}{x^2(x+y)}=\frac{x-y}{x^2}.\end{aligned}$$

5. Aplicando o item (a) da proposição 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{(x^3+y^3+z^3)^2-(x^3-y^3-z^3)^2}{y^3+z^3}=\\ &=\frac{[(x^3+y^3+z^3)-(x^3-y^3-z^3)][(x^3+y^3+z^3)+(x^3-y^3-z^3)]}{y^3+z^3}\\ &=\frac{2(y^3+z^3)\cdot 2x^3}{y^3+z^3}=4x^3.\end{aligned}$$

6. Como $ab=1\Leftrightarrow\frac{1}{a}=b\Leftrightarrow\frac{1}{b}=a$, temos que

$$\frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)(b+a)}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}=1,$$

onde utilizamos o item (a) da proposição 2.1 na penúltima igualdade acima.

7. Temos $(y-x)(y+x)=19^2$, com $y-x$ e $y+x$ inteiros tais que $0<y-x<y+x$. Portanto, a única possibilidade é que tenhamos $y-x=1$ e $y+x=361$, de forma que $y=181$ e $x=180$.

8. Uma aplicação judiciosa do item (b) da proposição 2.1 nos dá

$$\begin{aligned}a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2-2a^2b^2=[(a+b)^2-2ab]^2-2(ab)^2\\ &= (m^2-2n)^2-2n^2=m^4-4m^2n+2n^2.\end{aligned}$$

9. Segue do item (c) da proposição 2.1 que

$$\begin{aligned}a^6+b^6 &= (a^2)^3+(b^2)^3=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)\\ &= (a^4+b^4)-a^2b^2=(a^2+b^2)^2-3a^2b^2\\ &= 1-3(ab)^2,\end{aligned}$$

de sorte que $\frac{1-3(ab)^2}{a^6+b^6} = \frac{a^6+b^6}{a^6+b^6} = 1$.

10. Observe que

$$\begin{aligned}(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 &= \\ &= (a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2) \\ &= a^2(c^2+d^2) + b^2(d^2+c^2) = (a^2+b^2)(c^2+d^2).\end{aligned}$$

11. Somando 1 a ambos os membros da igualdade, obtemos

$$11^2 = 121 = x + y + xy + 1 = (x+1)(y+1).$$

Mas, como $x+1, y+1 > 1$, a única possibilidade viável é que tenhamos $x+1 = y+1 = 11$.

12. Para o item (a), segue do item (a) da proposição 2.1, com $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ no lugar de x e y, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})(\sqrt{x}\mp\sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{x-y}.\end{aligned}$$

Quanto a (b), aplicando o item (c) da proposição 2.1, com $\sqrt[3]{x}$ e $\sqrt[3]{y}$ no lugar de x e y, respectivamente, e observando que $(\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}$ e $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ (e analogamente para y), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y}} &= \frac{\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}.\end{aligned}$$

Por fim, (c) segue, imediatamente, de (b).

13. Pelo item (a) do problema anterior, temos

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = 2\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

A outra desigualdade pode ser provada de modo análogo.

14. Aplicando o item (a) do problema 12 duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3+4\sqrt{2}} \\ &= \frac{(2+\sqrt{2}-\sqrt{3})(3-4\sqrt{2})}{3^2-(4\sqrt{2})^2} \\ &= -\frac{1}{23}(2+\sqrt{2}-\sqrt{3})(3-4\sqrt{2}).\end{aligned}$$

15. Note primeiro que, para todo x real, tem-se $x^3+3 = x^3+(\sqrt[3]{3})^3 = (x+\sqrt[3]{3})(x^2 - x\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$. Fazendo $x=\sqrt{2}$, obtemos

$$2\sqrt{2}+3 = (\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})(2-\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}} &= \frac{2-\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{3+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{3+2\sqrt{2}}\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \\ &= (3-2\sqrt{2})(2-\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}).\end{aligned}$$

16. Basta substituir $y+z=-x$, $x+z=-y$ e $x+y=-z$. Em (a), obtemos

$$\frac{x^2}{(y+z)^2}+\frac{y^2}{(x+z)^2}+\frac{z^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(-x)^2}+\frac{y^2}{(-y)^2}+\frac{z^2}{(-z)^2} = 3.$$

Analogamente, $\frac{x^3}{(y+z)^3}+\frac{y^3}{(x+z)^3}+\frac{z^3}{(x+y)^3} = -3$.

17. Aplicando o item (a) da proposição 2.1 sucessivas vezes, obtemos

$$\begin{aligned}a^{64}-b^{64} &= (a^{32}+b^{32})(a^{32}-b^{32}) \\ &= (a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})(a^{16}-b^{16}) \\ &= (a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^8-b^8) \\ &= (a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^4-b^4) \\ &= (a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})\dots(a^2+b^2)(a^2-b^2) \\ &= (a^{32}+b^{32})(a^{16}+b^{16})\dots(a^2+b^2)(a+b)(a-b),\end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{a^{64}-b^{64}}{(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})}=(a^{32}+b^{32})(a+b).$$

18. Para o item (a), basta ver que

$$\begin{aligned}
&(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=\\
=\;& a(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\\
&-b(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\\
=\;& (a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1})\\
&-(a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3+\cdots+ab^{n-1}+b^n)\\
=\;& a^n-b^n.
\end{aligned}$$

Quanto a (b), observe que a alternância de sinais faz sentido exatamente porque n é ímpar:

$$\begin{aligned}
&(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})=\\
=\;& a(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})\\
&+b(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})\\
=\;& (a^n-a^{n-1}b+a^{n-2}b^2-\cdots-a^2b^{n-2}+ab^{n-1})\\
&+(a^{n-1}b-a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3-\cdots-ab^{n-1}+b^n)\\
=\;& a^n+b^n.
\end{aligned}$$

19. Mais geralmente, fatoremos $x^{4n}+4y^{4n}$, onde $n\in\mathbb{N}$, usando a fórmula para o quadrado de uma soma como inspiração:

$$\begin{aligned}
x^{4n}+4y^{4n} &= (x^{2n})^2+(2y^{2n})^2\\
&= [(x^{2n})^2+(2y^{2n})^2+2x^{2n}\cdot 2y^{2n}]-2x^{2n}\cdot 2y^{2n}\\
&= (x^{2n}+2y^{2n})^2-(2x^ny^n)^2\\
&= (x^{2n}+2y^{2n}+2x^ny^n)(x^{2n}+2y^{2n}-2x^ny^n).
\end{aligned}$$

20. Segue do exemplo 2.8 quer

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c).$$

Agora, como $(a+b)+(a+c)+(b+c)=2(a+b+c)$, o qual é um número par, temos que ao menos um dentre $a+b$, $a+c$ ou $b+c$ é par, de maneira que $3(a+b)(a+c)(b+c)$ é um múltiplo de 6. Portanto,

$$\begin{aligned}
6\mid(a+b+c) &\Leftrightarrow 6\mid(a+b+c)^3\\
&\Leftrightarrow 6\mid[a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)]\\
&\Leftrightarrow 6\mid(a^3+b^3+c^3).
\end{aligned}$$

21. Apresentemos duas soluções diferentes, cada uma usando um produto notável. Primeiro,

$$\begin{aligned}
a+b+c=0 &\Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3\\
&\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3\\
&\Rightarrow a^3+b^3+3ab(-c)=-c^3\\
&\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0,
\end{aligned}$$

exatamente a identidade desejada. Outra possibilidade é utilizar o produto notável do exemplo 2.8:

$$\begin{aligned}
a+b+c=0 &\Rightarrow (a+b+c)^3=0\\
&\Rightarrow a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)=0.
\end{aligned}$$

Mas de $a+b+c=0$, temos $a+b=-c$, $a+c=-b$, $b+c=-a$, e daí

$$3(a+b)(a+c)(b+c)=3(-c)(-b)(-a)=-3abc.$$

22. Como $a+\sqrt{a^2-b}\geq a-\sqrt{a^2-b}$, ambos os membros da igualdade desejada são reais não negativos, de sorte que basta mostrarmos que seus quadrados são iguais, i.e., que

$$\begin{aligned}
a\pm\sqrt{b} &= \left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)\\
&\quad\pm 2\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}\\
&= a\pm 2\sqrt{\frac{a^2-(\sqrt{a^2-b})^2}{4}},
\end{aligned}$$

o que é imediato verificar.

23. Escrevendo $\frac{1}{x+y+z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ e operando as adições de frações de ambos os membros, concluímos que $x(x+y+z)=-yz$ ou, ainda, $x^2=-\frac{xyz}{x+y+z}$. Argumentando analogamente, obtemos

$$x^2=y^2=z^2=-\frac{xyz}{x+y+z}.$$

De $x^2=y^2$, obtemos $x=y$ ou $x=-y$; mas, como $x+y\neq 0$, devemos ter $x=y$. Analogamente, $x=z$ e, daí, a igualdade do enunciado se reduz a $\frac{1}{3x}=\frac{3}{x}$, o que é, obviamente, impossível.

24. Fazendo $x=\frac{1}{b-c}$, $y=\frac{1}{c-a}$ e $z=\frac{1}{a-b}$, temos

$$\begin{aligned} xy+xz+yz &= \frac{1}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{(b-c)(a-b)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)} \\ &= \frac{1}{(b-c)(c-a)(a-b)}[(a-b)+(c-a)+(b-c)]=0. \end{aligned}$$

Mas, se x,y,z são números reais tais que $xy+xz+yz=0$, então sabemos que $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$. Portanto, temos em nosso caso que

$$\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}=\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)^2.$$

Por fim, uma vez que $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}$ é um número racional, a relação acima diz precisamente que o primeiro membro é o quadrado de um racional.

25. Faça $x=\sqrt[3]{a}$ e $y=\sqrt[3]{b}$, de modo que x,y>0. Então,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4(a+b)}\geq\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} &\Leftrightarrow \sqrt[3]{4(x^3+y^3)}\geq x+y \\ &\Leftrightarrow 4(x^3+y^3)\geq(x+y)^3 \\ &\Leftrightarrow 3(x^3+y^3)\geq 3xy(x+y) \\ &\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)\geq xy(x+y) \\ &\Leftrightarrow x^2-xy+y^2\geq xy \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0, \end{aligned}$$

o que é verdade. Há igualdade se, e só se, $x=y$ ou, ainda, $a=b$.

26. Note, inicialmente, que

$$a+b+3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3$$

de maneira que

$$\sqrt[3]{ab}=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3-(a+b)}{3(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}\in\mathbb{Q}.$$

A partir daí, concluímos que

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{ab}+(\sqrt[3]{b})^2}=\frac{a-b}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2-\sqrt[3]{ab}}\in\mathbb{Q}$$

e, portanto,

$$\sqrt[3]{a}=\frac{1}{2}[(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})+(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})]\in\mathbb{Q};$$

analogamente, $\sqrt[3]{b}\in\mathbb{Q}$.

27. Elevando ao cubo ambos os membros da igualdade $a+c+d=-(b+e+f)$, com o auxílio do produto notável do exemplo 2.8, obtemos

$$a^3+c^3+d^3+3(a+c)(a+d)(c+d)=-(b^3+e^3+f^3)-3(b+e)(b+f)(e+f).$$

Mas, como $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3=0$, segue da igualdade acima que

$$(a+c)(a+d)(c+d)=-(b+e)(b+f)(e+f).$$

Analogamente, partindo de $a+e+f=-(b+c+d)$, obtemos

$$(a+e)(a+f)(e+f)=-(b+c)(b+d)(c+d).$$

Por fim, multiplicando as duas últimas identidades acima e cancelando o fator comum $(c+d)(e+f)$, obtemos a identidade do enunciado.

28. Veja que

$$b^3 < b^3 + 6ab + 1 \leq b^3 + 6b^2 + 1 < b^3 + 6b^2 + 12b + 8 = (b+2)^3.$$

Portanto, se $b^3 + 6ab + 1$ deve ser um cubo perfeito, devemos ter

$$b^3 + 6ab + 1 = (b+1)^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1,$$

e segue daí que $2a = b + 1$. Substituindo $b = 2a - 1$ em $a^3 + 6ab + 1$, obtemos que o número $a^3 + 6a(2a-1) + 1 = a^3 + 12a^2 - 6a + 1$ deve ser um cubo perfeito. Mas é imediato verificar que

$$a^3 < a^3 + 12a^2 - 6a + 1 < (a+4)^3,$$

de modo que as únicas possibilidades são

$$a^3 + 12a^2 - 6a + 1 = (a+1)^3,\ (a+2)^3 \text{ ou } (a+3)^3.$$

Cada uma dessas possibilidades nos dá uma equação do segundo grau em a. Resolvendo-as, obtemos $a = 1$ como única solução inteira. Logo, $b = 2a - 1 = 1$.

Seção 2.2

2. Para a primeira desigualdade, interprete $|x - a|$ como a distância de x a a na reta numerada. Para as outras três desigualdades, adapte a sugestão dada à primeira.

3. Analise separadamente os casos (i) $x, y \geq 0$, (ii) $x \geq 0 > y$, (iii) $y \geq 0 > x$ e (iv) $x, y < 0$, mostrando que a igualdade se verifica em todos eles.

4. Para (a) consideremos dois casos: se $x - 1 \geq 0$, então $|x-1| = x-1$ e a equação dada se resume a $x^2 + 5(x-1) + 11 = 0$, i.e., $x^2 + 5x + 6 = 0$. Suas raízes são $x = -2$ ou -3, mas nenhuma delas cumpre a condição de ser $x \geq 1$; logo, não há soluções neste caso. Se $x - 1 < 0$, então $|x-1| = 1-x$ e a equação fica $x^2 - 5x + 16 = 0$. Como o discriminante

dessa equação é $\Delta = -39 < 0$, não há raízes reais. Portanto, a equação dada não possui soluções. Quanto a (b), há dois casos a considerar: $x^2 - 3x \geq 0$ ou $x^2 - 3x < 0$. No primeiro caso, que equivale a $x(x-3) \geq 0$, temos $|x^2 - 3x| = x^2 - 3x$. A equação dada se reduz então a $x^2 - 3x = x - 1$, cujas raízes são $x = 2 \pm \sqrt{3}$. Destas, somente $x = 2 + \sqrt{3}$ satisfaz a condição $x(x-3) \geq 0$, sendo portanto a única raiz válida. O segundo caso equivale a $x(x-3) < 0$, e nele temos $|x^2 - 3x| = -(x^2 - 3x)$. Assim, a equação dada se reduz a $-(x^2 - 3x) = x - 1$, ou ainda $x^2 - 2x - 1 = 0$, cujas raízes são $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Somente $x = 1 + \sqrt{2}$ cumpre a condição $x(x-3) < 0$, sendo então a única raiz válida nesse caso. Para (c), podemos reescrever a equação dada na forma $\left|\frac{-3x+2}{x+1}\right| = 6 - x$, ou ainda $|3x - 2| = (6 - x)|x + 1|$. Para nos livrar dos módulos, teremos de considerar quatro casos, resultantes dos cruzamentos das possibilidades de sinal para $3x - 2$ e $x + 1$:

- $3x - 2 \geq 0$ e $x + 1 \geq 0$: nesse caso, $|3x - 2| = 3x - 2$ e $|x+1| = x+1$, e ficamos com a equação $3x - 2 = (6-x)(x+1)$, de raízes $x = -2$ ou 4. Somente $x = 4$ satisfaz as condições dadas.

- $3x - 2 \geq 0$ e $x + 1 < 0$: tais condições são o mesmo que $x \geq \frac{2}{3}$ e $x < -1$, não havendo número real que as satisfaça.

- $3x - 2 < 0$ e $x + 1 \geq 0$: aqui temos $|3x - 2| = -(3x - 2)$ e $|x+1| = x+1$, de modo que a equação dada se torna $-(3x-2) = (6-x)(x+1)$. Essa equação é idêntica à do item anterior, tendo portanto raízes $x = 4 \pm \sqrt{5}$. Novamente nenhuma delas satisfaz as condições dadas.

- $3x - 2 < 0$ e $x + 1 < 0$: deixamos ao leitor a tarefa de terminar a análise desse caso.

Por fim, (d), (e) e (f) podem ser resolvidos com a utilização de argumentos análogos aos acima.

5. Analise separadamente os casos $x < 0$, $0 < x < 1$, $x > 1$. O conjunto solução é $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

6. Como $|y| \geq y$ e $|-y| = |y|$ para todo real y, temos $|x-a| \geq x-a$ e $|x-b| = |b-x| \geq b-x$. Portanto, para que a equação dada tenha alguma raiz real x, devemos ter

$$c = |x-a| + |x-b| \geq (x-a) + (b-x) = b-a,$$

quer dizer, $c \geq b-a$. Concluímos, pois, que uma condição *necessária* à existência de soluções reais para a equação dada é que $c \geq b-a$. Logo, se $c < b-a$, a equação não terá solução. Vejamos o que ocorre caso $c \geq b-a$ (i.e., vejamos se essa condição também é *suficiente* para a existência de soluções): desde que todo real x satisfaz uma das possibilidades $x \leq a$, $a < x \leq b$ ou $x > b$, vamos analisá-las separadamente:

- $x \leq a$: então $x-a \leq 0$ e $x-b \leq 0$ (porque?), de modo que a equação dada se reduz a $-(x-a)-(x-b) = c$, cuja raiz é $x = \frac{1}{2}(a+b-c)$. Verifique que tal raiz de fato satisfaz $x \leq a$.
- $a < x \leq b$: a equação dada se reduz a $(x-a)-(b-x) = c$, ou ainda $b-a = c$. Como devemos interpretar essa igualdade? Bem, se ela for verdadeira então todo real x tal que $a < x \leq b$ será solução da equação; se ela for falsa, então a equação não terá soluções x satisfazendo as condições dadas.
- $x > b$: chegamos à solução $x = \frac{1}{2}(a+b+c)$, que realmente satisfaz a condição $x > b$.

Logo, nossa equação terá 0 soluções caso $c < b-a$, duas soluções ($x = \frac{1}{2}(a+b-c)$ ou $x = \frac{1}{2}(a+b+c)$) caso $c > b-a$ e uma infinidade de soluções (todo $a < x \leq b$) caso $c = b-a$.

7. Mostre que todo $x \in (n, n+1)$ é raiz da equação.

8. Basta ver que

$$\left|\frac{r+2}{r+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{1}{r+1} + 1 - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{1}{r+1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right|$$
$$= \frac{|\sqrt{2}-r|}{(r+1)(\sqrt{2}+1)} < \frac{1}{2}|r-\sqrt{2}|,$$

uma vez que $r \geq 0$ e $\sqrt{2} > 1$.

9. Note primeiro que, dados dois reais distintos x e y, tem-se

$$\{x, y\} = \{\max\{x,y\}, \min\{x,y\}\},$$

de modo que

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{\max\{a_i,b_i\}, \min\{a_i,b_i\}\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{a_i,b_i\} = \{1,2,3,\ldots,2n\}.$$

Também,

$$|x-y| = \max\{x,y\} - \min\{x,y\},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & |a_1-b_1| + |a_2-b_2| + \cdots + |a_n-b_n| = \\ = \ & (\max\{a_1,b_1\} + \max\{a_2,b_2\} + \cdots + \max\{a_n,b_n\}) \\ & -(\min\{a_1,b_1\} + \min\{a_2,b_2\} + \cdots + \min\{a_n,b_n\}). \end{aligned}$$

Por outro lado, dados $1 \leq k, l \leq n$, com $k \neq l$, temos:

$$k > l \Rightarrow \max\{a_k,b_k\} \geq a_k > a_l \geq \min\{a_l,b_l\}$$

e

$$k < l \Rightarrow \max\{a_k,b_k\} \geq b_k > b_l \geq \min\{a_l,b_l\},$$

de maneira que

$$\{\max\{a_1,b_1\}, \max\{a_2,b_2\}, \ldots, \max\{a_n,b_n\}\} = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$$

e

$$\{\min\{a_1,b_1\}, \min\{a_2,b_2\}, \ldots, \min\{a_n,b_n\}\} = \{1,2,\ldots,n\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & |a_1-b_1| + |a_2-b_2| + \cdots + |a_n-b_n| = \\ & = ((n+1)+(n+2)+\cdots+2n) - (1+2+\cdots+n) = n^2. \end{aligned}$$

Seção 2.3

1. Resolva a equação equivalente $x^2 - a^2 = 0$.

2. Basta observar que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

3. Como $x^2 = |x|^2$, as soluções da primeira equação são os números reais x tais que $|x| = 3$ ou $|x| = -2$, i.e., $x = \pm 3$. Portanto, $a = 3 + (-3) = 0$ e $b = 3(-3) = -9$.

4. Se $x = \alpha$ for raiz da equação dada, então $\alpha^2 + b|\alpha| + c = 0$. Mas aí,

$$(-\alpha)^2 + b|-\alpha| + c = \alpha^2 + b|\alpha| + c = 0,$$

i.e., $x = -\alpha$ também é raiz da equação. Portanto, como $\alpha + (-\alpha) = 0$, a soma das raízes da equação é sempre igual a 0.

5. Para o item (a), segue de $\sqrt{x+2} = 10 - x$ que $x + 2 = (10 - x)^2$ ou, ainda, $x^2 - 21x + 98 = 0$. Como $7 + 14 = 21$ e $7 \cdot 14 = 98$, segue que as raízes dessa última equação são $x = 7$ ou $x = 14$. No entanto, somente $x = 7$ satisfaz a equação original, uma vez que substituindo $x = 14$ na mesma obtemos $\sqrt{16} = -4$, um absurdo.

Quanto a (b), observe inicialmente que devemos ter $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$, a fim de que as raízes quadradas tenham sentido. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+10} = \sqrt{2x+3} + \sqrt{1-3x} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x + 10 = (\sqrt{2x+3} + \sqrt{1-3x})^2 \\
&\Leftrightarrow x + 10 = 4 - x + 2\sqrt{(2x+3)(1-3x)} \\
&\Leftrightarrow x + 3 = \sqrt{(2x+3)(1-3x)} \\
&\Leftrightarrow (x+3)^2 = (2x+3)(1-3x) \\
&\Leftrightarrow 7x^2 + 13x + 6 = 0,
\end{aligned}$$

de sorte que $x = -1$ ou $-\frac{6}{7}$. Como ambos tais valores pertencem ao intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right]$, concluímos que são as soluções da equação do enunciado.

Por fim, quanto ao item (c), fazendo a susbtituição $y = x^2 + 18x$ transformamos a equação dada em $y + 30 = 2\sqrt{y + 45}$. Elevando ambos os membros ao quadrado, segue que $(y + 30)^2 = 4(y + 45)$ ou, ainda, $y^2 + 56y + 720 = 0$, cujas raízes são $y = -36$ ou -20. Destas, somente $y = -20$ nos serve, uma vez que $y + 30 = 2\sqrt{y+45}$ nos dá $y + 30 \geq 0$ e $y + 45 \geq 0$, i.e., $y \geq -30$. Portanto, $x^2 + 18x + 20 = 0$ e, daí, $x = -9 \pm \sqrt{61}$.

6. Observe, inicialmente, que $x \geq \frac{1}{2}$, a fim de que $\sqrt{2x-1}$ tenha sentido no conjunto dos reais. Também, $x \geq \sqrt{2x-1}$, a fim de que os radicandos das raízes quadradas do primeiro membro tenham sentido. Mas, como

$$x \geq \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x^2 \geq 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0,$$

o que é sempre verdade, a condição para a existência das raízes quadradas da equação se resume a $x \geq \frac{1}{2}$. Agora,

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}\right)^2 \\
&= 2x + 2\sqrt{(x + \sqrt{2x-1})(x - \sqrt{2x-1})} \\
&= 2x + 2\sqrt{x^2 - (2x-1)} = 2x + 2|x-1|.
\end{aligned}$$

Consideremos somente o item (b), deixando os outros dois itens como exercícios para o leitor. Sendo $A = 1$, temos de resolver a equação $2x + 2|x-1| = 1$, sob a condição de que $x \geq \frac{1}{2}$. Se $x \geq 1$, a equação se resume a $2x + 2(x-1) = 1$, e segue que $x = \frac{3}{4}$, valor que não satisfaz a condição $x \geq 1$. Se $\frac{1}{2} \leq x < 1$, a equação se resume a $2x + 2(1-x) = 1$, a qual é uma igualdade falsa para todo x em tal intervalo. Logo, no item (b) não há soluções.

7. Sejam $ax^2 + bx + c = 0$ a equação do primeiro modelo, $a'x^2 + bx + c = 0$ a do segundo modelo e $ax^2 + bx + c' = 0$ a do terceiro modelo. Como as raízes da equação do segundo modelo são 2 e 3, temos que $-\frac{b}{a'} = 5$ e $\frac{c}{a'} = 6$, de sorte que $-\frac{b}{c} = \frac{5}{6}$; por outro lado, como as raízes da

equação do terceiro modelo são 2 e -7, temos que $-\frac{b}{a} = -5$. Assim, a equação do primeiro modelo é $ax^2 + 5ax - 6a = 0$, cujas raízes são as mesmas da equação $x^2 + 5x - 6 = 0$, i.e., -6 e 1.

8. Segue da proposição 2.13 que $a + b = -a$ e $ab = b$. A segunda igualdade fornece $a = 1$, valor que substituído na primeira equação nos dá $b = -2$.

9. Novamente pela proposição 2.13 (aplicada às duas equações), temos $-a = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 13 - 2 \cdot 9 = -5$ e $b = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 9^2 = 81$. Portanto, $a + b = 86$.

10. Uma possibilidade é a equação $x^2 - Sx + P = 0$, onde

$$\begin{aligned} S &= u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2) \\ &= -[(u+v)^2 - 3uv] \\ &= -[(-1)^2 - 3(-1)] = -4 \end{aligned}$$

e

$$P = u^3v^3 = (uv)^3 = (-1)^3 = -1.$$

11. Uma possibilidade é a equação $x^2 - S'x + P' = 0$, onde

$$S' = (\alpha S + P) + (\beta S + P) = (\alpha + \beta)S + 2P = S^2 + 2P$$

e

$$P' = (\alpha S + P)(\beta S + P) = \alpha\beta S^2 + (\alpha + \beta)SP + P^2 = 2S^2P + P^2,$$

onde utilizamos as relações $\alpha + \beta = S$ e $\alpha\beta = P$ nas igualdades acima.

12. Se $\alpha = 7 + 4\sqrt{3}$ e $\beta = 7 - 4\sqrt{3}$, então $\alpha + \beta = 14$ e $\alpha\beta = 1$, de sorte que α e β são as raízes da equação de segundo grau $x^2 - 14x + 1 = 0$. Portanto, $\alpha^2 = 14\alpha - 1$ e $\beta^2 = 14\beta - 1$ e, a partir dessas igualdades, obtemos

$$\alpha^{k+2} + \beta^{k+2} = 14(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - (\alpha^k + \beta^k).$$

Agora, faça k igual a 0, 1, 2 e 3 para calcular, sucessivamente, $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^3 + \beta^3$, $\alpha^4 + \beta^4$ e $\alpha^5 + \beta^5$.

13. Parafraseie a solução do problema anterior.

14. Substituindo x por α, obtemos a igualdade $\alpha^2 = \alpha + 1$ e, a partir dela, sucessivamente

$$\alpha^4 = (\alpha^2)^2 = (\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 3\alpha + 2$$

e

$$\alpha^5 = \alpha \cdot \alpha^4 = \alpha(3\alpha + 2) = 3\alpha^2 + 2\alpha = 3(\alpha + 1) + 2\alpha = 5\alpha + 3.$$

Portanto, $\alpha^5 - 5\alpha = 3$.

15. Como as raízes são inteiros com produto igual a 5, concluímos que elas são (i) 1 e 5 ou (ii) -1 e -5. No primeiro caso, $m = -(1 + 5) = -6$, ao passo que, no segundo, $m = -((-1) + (-5)) = 6$.

16. A equação dada é equivalente a

$$x^2 - (b + c + 2a^2)x + [bc + a^2(b + c)] = 0.$$

Para que as raízes de tal equação sejam sempre reais e distintas, basta mostrarmos que sempre se tem $\Delta > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \Delta &= (b + c + 2a^2)^2 - 4[bc + a^2(b + c)] \\ &= (b + c)^2 + 4a^4 - 4bc = (b - c)^2 + 4a^4 > 0, \end{aligned}$$

uma vez que $a \neq 0$.

17. Fazendo $x - \frac{1}{x} = a$, obtemos $x^2 - ax - 1 = 0$ (1) e, daí, $\frac{1}{x} = x - a$. Logo, a equação original se torna $x = \sqrt{a} + \sqrt{1 - (x - a)}$ ou, ainda, $x - \sqrt{a} = \sqrt{1 + a - x}$ (2). Elevando ambos os membros de (2) ao quadrado, obtemos

$$x^2 + a - 2\sqrt{a}x = 1 + a - x$$

ou, o que é o mesmo, $x^2 - (2\sqrt{a} - 1)x - 1 = 0$ (3). Subtraindo (3) de (1), segue que $(2\sqrt{a} - 1 - a)x = 0$. Como $x \neq 0$, deve ser $2\sqrt{a} - 1 - a = 0$, donde $a = 1$. Então $x - \frac{1}{x} = 1$, de sorte que $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mas segue de (2) que $x - 1 = x - \sqrt{a} = \sqrt{1 + a - x} \geq 0$, de modo que $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Seção 2.4

1. Se u for uma raiz comum das equações dadas, então $au^3 - u^2 - u - (a+1) = 0$ $(*)$ e $au^2 - u - (a+1) = 0$. Multiplicando a segunda igualdade por u, obtemos $au^3 - u^2 - (a+1)u = 0$; subtraindo esse resultado de $(*)$, chegamos a $(a+1)u - u - (a+1) = 0$, de modo que $u = 1 + \frac{1}{a}$. Portanto, se as equações dadas tiverem uma raiz em comum, tal raiz será $u = 1 + \frac{1}{a}$. Resta somente verificar que $u = 1 + \frac{1}{a}$ é, realmente, raiz de ambas as equações, tarefa que deixamos a cargo do leitor.

2. Para o item (a), basta ver que

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 5x &= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (2x - 2) + 3 \\ &= (x-1)^3 + 2(x-1) + 3. \end{aligned}$$

Agora, segue de (a) que as igualdades do enunciado podem ser reescritas como

$$(x-1)^3 + 2(x-1) + 3 = 1 \text{ e } (y-1)^3 + 2(y-1) + 3 = 5.$$

Somando membro a membro as identidades acima, chegamos a

$$(x-1)^3 + (y-1)^3 + 2(x+y-2) = 0.$$

Substituindo

$$(x-1)^3 + (y-1)^3 = (x+y-2)[(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + (y-1)^2]$$

na relação acima e colocando $a+b-2$ em evidência, obtemos finalmente

$$(x+y-2)[(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + (y-1)^2 + 2] = 0.$$

Há, agora, duas possibilidades: $x+y-2 = 0$ ou $(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + (y-1)^2 + 2 = 0$. Para mostrar que a segunda possibilidade não ocorre, faça $x - 1 = a$, $y - 1 = b$ e observe que

$$a^2 - ab + b^2 + 2 = a^2 - ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} + 2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 2 > 0.$$

4. Use o resultado do problema anterior.

5. Compare os coeficientes de ambos os membros da igualdade

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x^2 + \beta x + \gamma)$$

para obter as igualdades $\beta - \alpha = a$, $\gamma - \alpha\beta = b$ e $-\alpha\gamma = c$. Agora, use a primeira e a terceira relações para obter $\beta = a + \alpha$ e $\gamma = -\frac{c}{\alpha}$, mostrando, em seguida, que tais valores para β e γ também satisfazem a relação $\gamma - \alpha\beta = b$ (nesse passo você precisará utilizar a igualdade $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$).

6. Para o item (a), faça $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ e $b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, de sorte que $\alpha = a + b$. Em seguida, use o fato de que

$$\alpha^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = a^3 + b^3 + 3ab\alpha,$$

juntamente com a relação $ab = -1$. Quanto ao item (b), use o resultado do problema anterior para mostrar que $x^3 + 3x - 4 = (x-1)(x^2 + x + 4)$, de modo que $x = 1$ é a única raiz real da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

7. Use o resultado do problema 9.

8. Para calcular o valor da primeira expressão, use as relações (2.16), juntamente com a identidade $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$; para as duas últimas, comece observando que, uma vez que α é raiz da equação, temos $\alpha^3 = 3\alpha - 1$, e analogamente para β e γ. Em seguida, some membro a membro as relações assim obtidas.

9. Expanda a expressão $(y+d)^3 + a(y+d)^2 + b(y+d) + c$ e imponha que o coeficiente de y^2 seja igual a 0.

11. Basta ver que

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\right). \end{aligned}$$

12. Basta ver que

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right)^2 - 2.$$

13. $x^2 - x - 1 = 0$ equivale a $x - \frac{1}{x} = 1$. Agora, use a identidade

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{1}{x^3} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3\right). \end{aligned}$$

14. $x^2 - 4x + 1 = 0$ equivale a $x + \frac{1}{x} = 4$. Use, agora, a expressão para $x^3 + \frac{1}{x^3}$ deduzida na sugestão ao problema 11, observando em seguida que

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 - 2.$$

16. Considere inicialmente os casos $n = 2$, 4 e 6; em seguida, adapte os argumentos desses casos particulares ao caso geral.)

17. Para o item (a), veja a sugestão ao problema 11. Para o item (b), argumente como feito no texto para equações biquadradas.

Seção 3.1

1. Execute o algoritmo de escalonamento em cada um dos itens acima.

2. Para o item (a), é suficiente ver que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ sempre é uma solução. Quanto a (b), suponha que $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$ e $x_1 = \beta_1$, $x_2 = \beta_2$, ..., $x_n = \beta_n$ sejam soluções distintas de (3.2). Se $t \in \mathbb{R}$ for escolhido arbitrariamente, mostre que $x_1 = t\alpha_1 + (1-t)\beta_1$, $x_2 = t\alpha_2 + (1-t)\beta_2$, ..., $x_n = t\alpha_n + (1-t)\beta_n$ também é solução.

3. Aplique o algoritmo de escalonamento, nos moldes do exemplo 3.3.

4. A substituição de variáveis $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$ transforma o sistema dado em um sistema linear de três equações e três incógnitas.

5. Observe que cada x_j comparece em exatamente três dentre as equações dadas. Portanto, somando membro a membro todas elas e dividindo ambos os membros da relação obtida por 3, obtemos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{100} = 0.$$

Para provarmos que $x_1 = 0$, note que

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + (x_2 + x_3 + x_4) + \cdots + (x_{98} + x_{99} + x_{100}) \\ &= x_1 + 0 + 0 + \cdots + 0 = x_1. \end{aligned}$$

Para obter $x_2 = 0$, veja que

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 + (x_3 + x_4 + x_5) + \cdots + (x_{99} + x_{100} + x_1) \\ &= x_2 + 0 + 0 + \cdots + 0 = x_2. \end{aligned}$$

Agora, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ implica em $x_3 = 0$. Então, $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ implica em $x_4 = 0$ e, assim por diante, todos os x_i's são iguais a zero.

Seção 3.2

1. Basta manipular as equações do sistema e usar produtos notáveis.

2. Sendo $z = 1/(x+y)$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} z + x = a + 1 \\ zx = a \cdot 1 \end{cases}.$$

Há, portanto, duas possibilidades: $(z, x) = (a, 1)$ ou $(z, x) = (1, a)$. Essas possibilidades levam aos sistemas

$$\begin{cases} x + y = a^{-1} \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x = a^{-1} \end{cases},$$

ambos de solução imediata.

3. Adapte, ao presente caso, as ideias da solução ao problema anterior.

4. Some ordenadamente as três equações e escreva o resultado como

$$(ax_1^2+(b-1)x_1+c)+(ax_2^2+(b-1)x_2+c)+(ax_3^2+(b-1)x_3+c)=0.)$$

Em seguida, analise separadamente os itens (a) e (b).

5. Suponha, sem perda de generalidade, que $x \geq y$. Em seguida, utilize as equações do sistema para concluir que $x = y = z$. Por fim, note que $x = 1$ é raiz de $x^3 - 2x + 1 = 0$. Você precisará do resultado do problema 9, página 66.

6. Transforme o primeiro membro numa soma de quadrados e aplique o resultado do problema 13, página 16 ou, o que é o mesmo, o lema 3.7 no caso $n = 3$.

7. Substituindo $y = \frac{1}{4}(a - z - 3x)$ na primeira equação, obtemos

$$x^2 + \frac{1}{16}(a - z - 3x)^2 = 4z$$

ou, ainda,

$$25x^2 - 6x(a - z) + (a - z)^2 - 64z = 0$$

A fim de que a solução do sistema seja única, o discriminante dessa equação de segundo grau (em x) deve ser igual a zero, i.e., devemos ter

$$36(a - z)^2 = 100[(a - z)^2 - 64z]$$

ou, ainda, $(a - z)^2 = 100z$. Sendo esse o caso, temos (da equação de segundo grau em x acima) $x = \frac{3}{25}(a - z)$ e (da segunda equação do sistema) $y = \frac{4}{25}(a - z)$. Portanto, a solução do sistema será única se, e só se, a equação (em z) $(a - z)^2 = 100z$ tiver uma única solução. Uma vez que ela equivale a $z^2 - 2z(a+50)+a^2 = 0$, seu discriminante também deve ser igual a zero, i.e., devemos ter $(a + 50)^2 = a^2$. Logo, $a = -25$.

8. Veja que

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{x-1} - 2\sqrt{x+2} &= (x-1) + 1 + \frac{3}{x-1} - 2\sqrt{x+2} \\ &= (x-1) + \frac{x+2}{x-1} - 2\sqrt{x+2} \\ &= \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\right)^2 \end{aligned}$$

(as raízes acima existem, uma vez que $x > 1$). Portanto, pelo lema 3.7, resolver a equação do enunciado equivale a resolver o sistema

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = \sqrt{y-1} - \sqrt{\frac{y+2}{y-1}} = \sqrt{z-1} - \sqrt{\frac{z+2}{z-1}} = 0,$$

de modo que $x = y = z = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

9. Sendo $a = \sqrt[3]{x+5}$ e $b = \sqrt[3]{4-x}$, temos $a + b = 3$ e $a^3 + b^3 = 9$. Segue, daí, que

$$9 = a^3 + b^3 = a^3 + (3-a)^3 = 27 - 27a + 9a^2$$

ou, ainda, $a^2 - 3a + 2 = 0$. Portanto, $a = 1$ ou 2, donde $x = -4$ ou 3.

10. Introduza a variável $y = \sqrt{5-x}$ para transformar a equação dada em um sistema de duas equações em x e y.

11. Observe, inicialmente, que

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} &= x^2 + \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2 \\ &= x^2 + 1 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} \\ &= (x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{(x+1)^2} - 2x - \frac{2}{x+1} \\ &= (x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2} - 2(x+1) - \frac{2}{x+1} + 2. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $y = x + 1 + 1/(x+1)$, obtemos

$$(x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2} = y^2 - 2,$$

e nossa equação simplifica em $(y^2 - 2) - 2y + 2 = 3$, ou ainda $y^2 - 2y - 3 = 0$, cujas raízes são 3 e -1. Então, temos

$$x + 1 + \frac{1}{x+1} = 3 \quad \text{ou} \quad -1.$$

A possibilidade $x+1+1/(x+1) = -1$ equivale a $(x+1)^2+(x+1)+1 = 0$, que não tem raízes em $\mathbb{R}$. Já $x + 1 + 1/(x+1) = 3$ equivale a $(x+1)^2 - 3(x+1) + 1 = 0$, de modo que $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

13. Use o resultado do problema anterior.

14. Para $u \in \mathbb{R}$, temos

$$4u^2 - u^4 = 4 - (4 - 4u^2 + u^4) = 4 - (2 - u^2)^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 6 &= \sqrt{4x^2 - x^4 - 3} + \sqrt{4y^2 - y^4} + \sqrt{4z^2 - z^4 + 5} \\ &= \sqrt{1 - (2 - x^2)^2} + \sqrt{4 - (2 - y^2)^2} + \sqrt{9 - (2 - x^2)^2} \\ &\le \sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{9} = 1 + 2 + 3, \end{aligned}$$

de sorte que que deve ser $2 - x^2 = 2 - y^2 = 2 - z^2 = 0$, i.e., $x = \pm\sqrt{2}$, $y = \pm\sqrt{2}$, $z = \pm\sqrt{2}$.

15. Observe primeiro que se $x = 0$ então $y = z = 0$, valendo uma observação análoga caso seja $y = 0$ ou $z = 0$. Portanto podemos supor, sem perda de generalidade, que $xyz \neq 0$. Faça $1/x = u, 1/y = v, 1/z = w$. Então

$$v = \frac{1}{y} = \frac{1 + 4x^2}{4x^2} = \frac{1}{4x^2} + 1 = \frac{u^2}{4} + 1.$$

Podemos transformar as demais equações de modo análogo, obtendo o sistema abaixo, equivalente ao original:

$$u^2 + 4 = 4v, \quad v^2 + 4 = 4w, \quad w^2 + 4 = 4u.$$

Somando membro a membro as três equações acima, chegamos a

$$(u-2)^2 + (v-2)^2 + (w-2)^2 = 0$$

e, daí, a $u = v = w = 2$ ou, ainda, $x = y = z = 1/2$. Assim, as soluções do sistema original são $x = y = z = 0$ ou $1/2$.

16. Para a primeira parte, reduza $x + \frac{4}{x} - 4$ a um mesmo denominador e use produtos notáveis. Para resolver o sistema, some membro a membro as três equações e use em seguida o resultado do problema 12, página 86.

17. De $x + 2/x = 2y$, segue que x e y têm um mesmo sinal. De modo análogo concluímos que y e z têm sinais iguais. Portanto, ou x, y e z são todos positivos ou todos negativos. Agora, note que (x, y, z) é solução se, e só se, $(-x, -y, -z)$ é solução, de modo que podemos nos restringir ao caso $x, y, z > 0$. Pela desigualdade entre as médias, sabemos que $u + 2/u \geq 2\sqrt{2}$, para $u > 0$. Então,

$$2y = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2},$$

de modo que $y \geq \sqrt{2}$. Do mesmo modo, concluímos que $x, z \geq \sqrt{2}$. Agora, somando membro a membro as equações do sistema, obtemos

$$x + y + z = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}.$$

Uma vez que $u > \frac{2}{u}$ para $u > \sqrt{2}$, segue que, se ao menos um dentre x, y, z for maior que $\sqrt{2}$, então

$$x + y + z > \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}.$$

Isso nos diz que deve ser $x = y = z = \sqrt{2}$. Assim, as soluções do sistema são

$$x = y = z = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = y = z = -\sqrt{2}.$$

Seção 4.1

2. (a) $a_n = n$, para $n \geq 1$ ímpar, e $a_n = (-1)^{n-1}n$, para $n \geq 1$ par; (b) $a_n = \frac{n}{n+1}$, para $n \geq 1$; (c) $a_n = n$, para $n \geq 1$ ímpar, e $a_n = \frac{1}{n}$, para $n \geq 1$ par.

3. Basta observar que

$$b_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{3a_k + 1}{a_k} = 3 + \frac{1}{a_k} = 3 + b_k.$$

4. Para o item (a), temos $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}$, para $k \geq 4$. Para o item (b), temos $a_1 = 1$ e $a_{k+1} = 2^{a_k}$, para $k \geq 1$.

Seção 4.2

1. Observe que a $n^{\underline{a}}$ linha começa, à esquerda, com n e tem $2n - 1$ números.

2. Escreva $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ como uma soma de potências de 10.

3. Use o resultado do problema anterior.

4. Basta mostrarmos que a diferença $b_{k+1} - b_k$ não depende de k; automaticamente, o resultado dessa diferença nos dará a razão da PA $(b_k)_{k\geq1}$. Por definição, temos

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_k &= (a_{k+2}^2 - a_{k+1}^2) - (a_{k+1}^2 - a_k^2) \\ &= (a_{k+2} - a_{k+1})(a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k)(a_{k+1} + a_k) \\ &= r(a_{k+2} + a_{k+1}) - r(a_{k+1} + a_k) \\ &= r(a_{k+2} - a_k) = r \cdot 2r = 2r^2 \end{aligned}$$

e, daí, a razão da PA $(b_k)_{k\geq1}$ é $2r^2$.

5. Aplique a fórmula do termo geral para $a_p + a_q$ e $a_u + a_v$.

6. Seja $a_1 = rm$, com m inteiro não negativo. Pela fórmula para o termo geral, temos

$$a_k + a_l = 2a_1 + (k + l - 1)r = a_1 + (m + k + l - 1)r = a_{m+k+l}.$$

7. A fórmula para o termo geral de uma PA fornece as relações $\alpha = a_p = a_1 + (p-1)r$, $\beta = a_q = a_1 + (q-1)r$ e $a_{p+q} = a_1 + (p+q-1)r$, onde r é a razão da PA. Considerando as duas primeiras relações como um sistema linear em a_1 e r, expresse tais quantidades em função de α, β, p e q; em seguida, substitua os valores assim obtidos na expressão para a_{p+q}.

8. Sendo $2n - 1$ o menor desses inteiros e k sua quantidade, a fórmula para o termo geral de uma PA garante que o maior dos números é igual a $(2n-1) + 2(k-1) = 2n + 2k - 3$. Portanto, sua soma é igual a

$$\frac{1}{2}[(2n - 1) + (2n + 2k - 3)]k = 7^3,$$

de sorte que $(2n + k - 2)k = 7^3$. Agora, como $2n + k - 2 \geq k > 1$, a única possibilidade é $2n + k - 2 = 7^2$ e $k = 7$, de modo que $n = 22$.

9. Sejam r a razão da PA e $a_2 = m$, de sorte que $r \in \mathbb{N}$ e $m > 1$. Então

$$a_{mk+2} = a_2 + ((mk + 2) - 2)r = m + mkr = m(1 + kr),$$

claramente um número composto.

10. O item (b) segue imediatamente de (a); quanto a este, considere separadamente os casos n par e n ímpar.

11. Por contradição, suponha que $a_m = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{3}$ e $a_p = \sqrt{5}$, onde $(a_k)_{k\geq1}$ é uma PA e m, n e p são naturais dois a dois distintos. Usando a fórmula do termo geral, calcule $\frac{n-m}{p-m}$.

12. Use a fórmula para o termo geral no primeiro membro.

13. Adapte a solução do exemplo 4.14.

14. Suponha, por contradição, que exista uma tal PA $(a_k)_{k\geq 1}$ de razão r, i.e., tal que $\frac{a_1}{r} \notin \mathbb{Q}$ mas $a_n^2 = a_m a_p$ para certos índices distintos m, n e p. Use a fórmula do termo geral para chegar a uma contradição.

15. Adapte a solução do exemplo 4.14.

16. Considere a sequência $(b_k)_{k\geq 1}$, dada por $b_k = a_k - 1$.

18. Suponha que $(a_k)_{k\geq 1}$ seja uma PG de razão q, tal que $a_m = 2$, $a_n = 3$ e $a_p = 5$. Então $a_1 q^{m-1} = 2$, $a_1 q^{n-1} = 3$ e $a_1 q^{p-1} = 5$, de sorte que $q^{m-n} = \frac{2}{3}$ e $q^{m-p} = \frac{2}{5}$. Portanto,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{m-p} = q^{(m-n)(m-p)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{m-n}$$

ou, ainda, $2^{n-p} \cdot 5^{m-n} = 3^{m-p}$. Obtenha, a partir daí, uma contradição.

Seção 4.3

1. Aplique o resultado do teorema 4.16.

2. Aplique o resultado do teorema 4.16.

3. Inicialmente, observe que $a_{k+2} - a_{k+1} = (2a_{k+1} - 1) - (2a_k - 1) = 2a_{k+1} - 2a_k$ ou, ainda, $a_{k+2} - 3a_{k+1} + 2a_k = 0$, para $k \geq 1$. Aplique, agora, o resultado do teorema 4.16.

4. Use o fato de que $x^2 + rx + s = (x - \alpha)^2$.

7. Para o item (a), a recorrência do enunciado fornece

$$\begin{aligned} 4b_{k+1}^2 &= 4(1 + 24a_{k+1}) = 4 + 6(1 + 4a_k + \sqrt{1 + 24a_n}) \\ &= 4 + 6\left(1 + \frac{1}{6}(b_k^2 - 1) + b_k\right) \\ &= b_k^2 + 6b_k + 9 = (b_k + 3)^2. \end{aligned}$$

Para o item (b), segue de (a) que $2b_{n+2} - b_{n+1} = 3 = 2b_{n+1} - b_n$ e, daí,

$$2b_{n+2} - 3b_{n+1} + b_n = 0.$$

Como $b_1 = 5$ e $b_2 = \sqrt{1 + 24a_2} = 4$, o teorema 4.16 garante que $b_n = 3 + \frac{4}{2^n}$. Por fim, quanto a (c), segue de (a) e de (b) que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{24}(b_n^2 - 1) = \frac{1}{24}\left(\left(3 + \frac{4}{2^n}\right)^2 - 1\right) \\ &= \frac{1}{24}\left(2 + \frac{4}{2^n}\right)\left(4 + \frac{4}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Seção 4.4

1. Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de segunda ordem, então $(a_{k+1} - a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA não constante, de forma que existe $r \neq 0$ tal que $(a_{k+2} - a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k) = r$, para todo $k \geq 1$. Em particular, para todo $k \geq 1$, temos $a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k \neq 0$ e

$$(a_{k+3} - a_{k+2}) - (a_{k+2} - a_{k+1}) = (a_{k+2} - a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k).$$

A recíproca pode ser provada de maneira análoga.

2. Escreva $a_{k+1} - a_k = 3k - 1$ e use somas telescópicas.

3. Escreva $a_{k+1} - a_k = 8k$ e use somas telescópicas.

4. Observe que $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ e use somas telescópicas.

5. O problema anterior é um caso particular deste.

6. Veja que, para $k > 1$, temos $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$; use, em seguida, o resultado do problema 4.

7. Imite o argumento do problema 4, escrevendo

$$\frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3}\right).$$

8. Para o item (a), basta observar que

$$\begin{aligned}(2k+1)^3-(2k-1)^3 &= 24k^2+2=16k^2+8k^2+2\\ &= 16k^2+(2k-1)^2+(2k+1)^2.\end{aligned}$$

Quanto a (b), basta escrevermos

$$\begin{aligned}(2n+1)^3-2 &= \sum_{k=2}^{n}[(2k+1)^3-(2k-1)^3]+(3^3-2)\\ &= \sum_{k=2}^{n}[(4k)^2+(2k+1)^2+(2k-1)^2]+25\\ &= \sum_{k=2}^{n}[(4k)^2+(2k+1)^2+(2k-1)^2]+4^2+3^2,\end{aligned}$$

observando que a última expressão acima é uma soma de $(n-1)\cdot 3+2=3n-1$ quadrados perfeitos.

9. Note que $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ e somas telescópicas.

10. Para o item (a), observe que $(k+1)^2+k^2+k^2(k+1)^2=k^4+2k^3+3k^2+2k+1=(k^2+k+1)^2$. Quanto ao item (b), segue de (a) que

$$\sqrt{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}+1}=\sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}}=\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}.$$

Basta, agora, observar que

$$\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

e utilizar somas telescópicas.

11. Substitua $F_{k+1}=F_{k+2}-F_k$ no numerador da fração do somatório para obter

$$\frac{F_{k+1}}{F_kF_{k+2}}=\frac{F_{k+2}-F_k}{F_kF_{k+2}}=\frac{1}{F_k}-\frac{1}{F_{k+2}}$$

e, em seguida, e use somas telescópicas.

12. Racionalize a fração $\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$ – veja o problema 12, página 44 – e, em seguida, use somas telescópicas.

13. Para o item (a), veja que $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x)$. Quanto ao item (b), use o item (a) para escrever

$$\begin{aligned}\frac{k}{k^4+k^2+1} &= \frac{k}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)\end{aligned}$$

e, em seguida, use somas telescópicas.

14. Racionalize a fração do somatório – veja o problema 12, página 44 – e use somas telescópicas em seguida.

15. Racionalize a fração do somatório – veja o problema 12, página 44 – e use somas telescópicas em seguida.

16. Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j^2}\right) &= \prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j}\right)\prod_{j=2}^{n}\left(1+\frac{1}{j}\right)\\ &= \prod_{j=2}^{n}\left(\frac{j-1}{j}\right)\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{j+1}{j}\right).\end{aligned}$$

Agora, faça $a_k=k$, para $k\geq 1$. Segue da proposição 4.29 que

$$\begin{aligned}\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j^2}\right) &= \prod_{j=2}^{n}\left(\frac{a_{j-1}}{a_j}\right)\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{a_{j+1}}{a_j}\right)\\ &= \frac{a_1}{a_n}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

17. Se S é a soma pedida, então

$$S=\sum_{k=0}^{101}\frac{x_k^3}{(1-x_k)^3+x_k^3}.$$

Como $1 - x_k = 1 - \frac{k}{101} = x_{101-k}$, temos

$$S = \sum_{k=0}^{101} \frac{x_k^3}{x_{101-k}^3 + x_k^3}$$

e podemos escrever

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=0}^{101} \frac{x_k^3}{x_{101-k}^3 + x_k^3} + \sum_{k=0}^{101} \frac{x_k^3}{x_{101-k}^3 + x_k^3} \\ &= \sum_{k=0}^{101} \frac{x_k^3}{x_{101-k}^3 + x_k^3} + \sum_{k=0}^{101} \frac{x_{101-k}^3}{x_{101-k}^3 + x_k^3} \\ &= \sum_{k=0}^{101} \frac{x_k^3 + x_{101-k}^3}{x_{101-k}^3 + x_k^3} = \sum_{k=0}^{101} 1 = 102. \end{aligned}$$

Logo, $S = 51$.

18. Fatore o numerador e o denominador da fração do produtório. Em seguida, se $a_k = k^2 - k + 1$, mostre que $a_{k+1} = k^2 + k + 1$ e use produtos telescópicos.

19. Mostremos que o que se pede é possível se, e só se, n for par. Para provar que n deve ser par, seja

$$\{1, 2, 3, \ldots, 4n\} = A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$

uma partição satisfazendo as condições do enunciado e, para $1 \le k \le n$, seja $x_k \in A_k$ o elemento que é igual à média aritmética dos três demais. Então $4x_k = \sum_{x \in A_k} x$ e segue que

$$4\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{x \in A_k} x = \sum_{x \in A} x = 1 + 2 + \cdots + 4n = 2n(4n+1),$$

donde $n(4n+1)$ deve ser par. Como $4n+1$ é ímpar, segue que n deve ser par. Para a recíproca, seja $n = 2k$, k inteiro, e escrevamos

$$\{1, 2, 3, \ldots, 8k\} = A_1 \cup \cdots \cup A_{2k},$$

onde

$$A_{2j-1} = 8(j-1) + \{1, 3, 4, 8\} \quad \text{e} \quad A_{2j} = 8(j-1) + \{2, 5, 6, 7\}.$$

(Aqui, para $X \subset \mathbb{R}$, definimos o conjunto $X + t$ por $X + t = \{x + t;\ x \in X\}$). Uma vez que $3 \cdot 4 = 1 + 3 + 8$ e $3 \cdot 5 = 2 + 6 + 7$ é imediato verificar que os conjuntos A_i definidos como acima satisfazem as condições do enunciado.)

20. Pelo resultado do problema 13, página 45, temos

$$\begin{aligned} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n} &= \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2} \\ &< \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

e, daí,

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

Essas duas desigualdades nos dão

$$\sum_{k=2}^{10000} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=2}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=2}^{10000} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right).$$

Mas

$$\sum_{k=2}^{10000} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = 2\sqrt{10001} - 2\sqrt{2}$$

e

$$\sum_{k=2}^{10000} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = 2\left(\sqrt{10000} - 1\right) = 198.$$

Portanto, se mostrarmos que $2\sqrt{10001} - 2\sqrt{2} > 197$, seguirá que o

maior inteiro menor ou igual a S é igual a 198. Para esse fim, veja

$$\begin{aligned} 2\sqrt{10001} > 2\sqrt{2}+197 &\Leftrightarrow \left(2\sqrt{10001}\right)^2 > \left(2\sqrt{2}+197\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 40004 > 788\sqrt{2}+38817 \\ &\Leftrightarrow 788\sqrt{2} < 1187 \Leftrightarrow 788^2\cdot 2 < 1187^2 \\ &\Leftrightarrow 1241888 < 1408969, \end{aligned}$$

o que é verdade.

21. Para o item (a), fatorando $(k+1)^{p+1}-k^{p+1}$ com o auxílio do resultado do problema 18, página 45, obtemos

$$\begin{aligned} (k+1)^{p+1}-k^{p+1} &= \sum_{j=1}^{p+1}(k+1)^{p+1-j}k^{j-1} \\ &< \sum_{j=1}^{p+1}(k+1)^{p+1-j}(k+1)^{j-1} \\ &= (p+1)(k+1)^p. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} (k+1)^{p+1}-k^{p+1} &= \sum_{j=1}^{p+1}(k+1)^{p+1-j}k^{j-1} \\ &> \sum_{j=1}^{p+1}k^{p+1-j}k^{j-1} = (p+1)k^p. \end{aligned}$$

Quanto ao item (b), segue de (a) e da fórmula para somas telescópicas que

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^p < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)^{p+1}-k^{p+1}}{p+1} = \frac{n^{p+1}-1}{p+1} < \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n}k^p > \sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p+1}-(k-1)^{p+1}}{p+1} = \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Capítulo 5

Nas sugestões/soluções apresentadas a seguir, o mais das vezes assumimos, implicitamente, a verificação dos respectivos casos iniciais e a formalização da hipótese de indução. De outra maneira, nos concentramos na execução do passo de indução, deixando ao leitor a tarefa de formalizar a demonstração completa por indução.

1. Segue da hipótese de indução que

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

2. Segue da hipótese de indução que

$$\sum_{j=1}^{k}j^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

3. Segue da hipótese de indução que

$$\begin{aligned} &1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1} = \\ &= \frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}. \end{aligned}$$

4. Pela hipótese de indução, temos

$$(k+1)+h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(k-1)+h(k) = 1+kh(k)+h(k),$$

de forma que basta mostrar que $1+(k+1)h(k) = (k+1)h(k+1)$ ou, ainda, que $(k+1)(h(k+1)-h(k)) = 1$. Mas

$$(k+1)(h(k+1)-h(k)) = (k+1)\cdot\frac{1}{k+1} = 1.$$

5. Segue da hipótese de indução que

$$\sum_{j=1}^{k} j(j+1) = \frac{1}{3}(k-1)k(k+1) + k(k+1)$$
$$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$$

6. Segue da hipótese de indução que

$$\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1)^2 = \frac{1}{6}(2k-1)2k(2k+1) + (2k+1)^2$$
$$= \frac{1}{6}(2k+1)2(k+1)(2k+3).$$

7. $4^{k+1}+15(k+1)-1 = (4^k+15k-1)+3(4^k+5)$; como $4^k+15k-1$ é um múltiplo de 9 (por hipótese de indução), basta mostrar que 4^k+5 é um múltiplo de 3. Para tanto, façamos outra indução: $4^{l+1}+5 = (4^l+5)+3\cdot 4^l$; como 4^l+5 é um múltiplo de 3 (novamente por hipótese de indução) e $3\cdot 4^l$ também o é, segue que $4^{l+1}+5$ é um múltiplo de 3.

8. $(k+1)^3-(k+1) = (k^3-k)+3(k^2+k)$; como k^3-k é um múltiplo de 3 (por hipótese de indução) e $3(k^2+k)$ também o é, segue que $(k+1)^3-(k+1)$ é um múltiplo de 3.

9. Para o primeiro caso, temos $u_{k+2} = -ru_{k+1} - su_k = -ra_{k+1} - sa_k = a_{k+2}$. O segundo caso é totalmente análogo.

10. Suponha que $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ é uma PA de razão r. A partir de

$$\frac{m}{a_1 a_{m+1}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{m-1}{a_1 a_m} + \frac{1}{a_m a_{m+1}},$$

obtemos $ma_m = (m-1)a_{m+1} + a_1$. Mas $a_m = a_1 + (m-1)r$, de sorte que

$$(m-1)a_{m+1} = m(a_1+(m-1)r) - a_1 = (m-1)(a_1+mr).$$

Logo, $a_{m+1} = a_1 + mr$, e $(a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1})$ também é uma PA.

11. Para o item (a), temos

$$a_{k+1} = a_k^2 - a_k + 1 = 1 + a_k(a_k - 1)$$
$$= 1 + a_k\cdot(a_1\ldots a_{k-1}) = 1 + a_1\ldots a_k a_{k+1}.$$

Quanto a (b), temos

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{k+1}} = 2 - \frac{1}{a_1a_2\ldots a_k} + \frac{1}{a_{k+1}}$$
$$= 2 - \frac{(a_{k+1} - a_1a_2\ldots a_k)}{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}} = 2 - \frac{1}{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}.$$

12. Pela hipótese de indução, temos

$$2^{2^{k+1}} = (2^{2^k})^2 > k^{2k},$$

de sorte que basta mostrarmos que $k^{2k} \geq (k+1)^{k+1}$ ou, o que é o mesmo, que $\left(\frac{k^2}{k+1}\right)^k \geq k+1$. Tal desigualdade é válida para todo $k \geq 3$, uma vez que, para um tal k, temos

$$\left(\frac{k^2}{k+1}\right)^k = \left(k-1+\frac{1}{k+1}\right)^k > (k-1)^k \geq (k-1)^3 \geq k+1.$$

13. Para o item (a), temos

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k + F_{k+1} = (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} = F_{k+3} - 1.$$

Para (b),

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_kF_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}F_{k+2}.$$

Os demais itens são totalmente análogos.

14. Observe que $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$, $F_{12} = 144$, $F_{13} = 233$, $F_{14} = 377$. Assim, $F_{12} = 12^2$ e $F_{13} > 13^2$, $F_{14} > 14^2$. Por outro lado, se $F_k > k^2$ e $F_{k+1} > (k+1)^2$, então

$$F_{k+2} = F_k + F_{k+1} > k^2 + (k+1)^2 > (k+2)^2,$$

de sorte que, por indução, temos $F_k > k^2$ para $k > 13$. Assim, as únicas soluções são $k = 1$ e $k = 12$.

15. Inicialmente, note que α é raiz de $p(x) = x^2 - x - 1$, de sorte que $\alpha^2 = \alpha + 1$. Assim, temos por indução que

$$\begin{aligned} \alpha^{k+1} &= \alpha^k \cdot \alpha = (F_k\alpha + F_{k-1})\alpha = F_k\alpha^2 + F_{k-1}\alpha = \\ &= F_k(\alpha+1) + F_{k-1}\alpha = \alpha(F_k + F_{k-1}) + F_k \\ &= F_{k+1}\cdot\alpha + F_k, \end{aligned}$$

Agora,

$$\alpha^n - n^2\alpha = F_n\alpha + F_{n-1} - n^2\alpha = (F_n - n^2)\alpha + F_{n-1}.$$

Uma vez que α é irracional, segue da igualdade acima que $\alpha^n - n^2\alpha$ só será inteiro quando $F_n - n^2 = 0$, e nosso problema equivale a encontrar todos os $n \in \mathbb{N}$ tais que $F_n = n^2$. Mas isso foi o objeto do problema anterior.

16. Para $n \in \mathbb{Z}$, seja $a_n = x^n + x^{-n}$. Mostremos primeiro, por indução, que $a_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A hipótese do problema nos dá $a_1 \in \mathbb{Z}$. Então

$$a_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = a_1^2 - 2 \in \mathbb{Z}.$$

Suponha agora, por hipótese de indução, que $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ para um certo $k \geq 2$. Então

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \\ &= \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \\ &= a_k a_1 - a_{k-1} \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

e o passo de indução está completo. Pelo segundo princípio de indução segue que $a_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para concluir, basta ver que $a_0 = 2$ e, se $n < 0$ for inteiro, então $a_n = a_{-n}$, que já provamos ser inteiro. Assim, $a_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

17. Segue da hipótese de indução que

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 &= (x_k^3 - 3x_k)^2 = x_k^6 - 6x_k^4 + 9x_k^2 \\ &= (y_k+2)^3 - 6(y_k+2)^2 + 9(y_k+2) \\ &= y_k^3 - 3y_k + 2 = y_{k+1} + 2. \end{aligned}$$

18. Basta provarmos que o quociente $\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n}$ independe de n. Isto é imediato por indução, uma vez que mostremos que

$$\frac{x_{n+2}+x_n}{x_{n+1}} - \frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n} = 0.$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+2}+x_n}{x_{n+1}} - \frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n} &= \frac{x_{n+2}x_n + x_n^2 - x_{n+1}^2 - x_{n-1}x_{n+1}}{x_{n+1}x_n} \\ &= \frac{(x_{n+1}^2 - 1) + x_n^2 - x_{n+1}^2 - (x_n^2 - 1)}{x_{n+1}x_n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

19. Se $a_j = j$ para $1 \leq j \leq k$, então, a partir da relação

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3 + a_{k+1}^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2$$

obtemos

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + a_{k+1}^3 = (1 + 2 + \cdots + k + a_{k+1})^2$$

ou, de acordo com o resultado do problema 2,

$$\frac{1}{4}[k(k+1)]^2 + a_{k+1}^3 = \left(\frac{1}{2}k(k+1) + a_{k+1}\right)^2.$$

Desenvolvendo o segundo membro, obtemos

$$a_{k+1}^3 = a_{k+1}^2 + k(k+1)a_{k+1}$$

ou, ainda, $a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0$. Daí, é imediato que $a_{k+1} = k+1$.

20. Se $x_k > \sqrt{a}$, então

$$x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_k - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_k}\right) = \frac{1}{2x_k}(x_k - \sqrt{a})^2 > 0.$$

Para a outra desigualdade, comecemos observando que, se $x \geq y > \sqrt{a}$, então $x + \frac{a}{x} \geq y + \frac{a}{y}$; de fato,

$$\left(x + \frac{a}{x}\right) - \left(y + \frac{a}{y}\right) = (x - y) + a\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{(x-y)}{xy}(xy - a) \geq 0.$$

Agora, se $x_k \leq \sqrt{a} + \frac{1}{2^{k-1}}$, então, a partir da desigualdade acima, obtemos

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{a}{\sqrt{a}+\frac{1}{2^{k-1}}}\right)$$
$$< \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a} + \frac{1}{2^k}.$$

21. Suponha que temos n_1 maneiras de escolher um objeto do tipo 1, n_2 maneiras de escolher um objeto do tipo 2, ..., n_k maneiras de escolher um objeto do tipo k e n_{k+1} maneiras de escolher um objeto do tipo $k+1$. Para escolher um objeto de cada um desses tipos, comece escolhendo um objeto de cada um dos tipos de 1 a k. Por hipótese de indução, há $n_1 \ldots n_k$ escolhas possíveis. Por outro lado, para cada uma delas, continuamos tendo n_{k+1} maneiras de escolher um objeto do tipo $k+1$, de sorte que o número de maneiras de, adicionalmente, escolher um objeto de tipo $k+1$ é igual a

$$\underbrace{n_1 \ldots n_k + n_1 \ldots n_k + \cdots + n_1 \ldots n_k}_{n_{k+1}} = n_1 \ldots n_k n_{k+1}.$$

22. Basta mostrar que $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ tem exatamente 2^n subconjuntos. Para o passo de indução, i.e., ao considerar os subconjuntos de I_{k+1}, lembre que esses podem ser de um dentre dois tipos: ou subconjuntos de I_k, ou subconjuntos de I_{k+1} que contém o elemento $k+1$. Do primeiro tipo há, por hipótese de indução, 2^k subconjuntos. Os subconjuntos do segundo tipo são da forma $A \cup \{k+1\}$, com $A \subset I_k$; portanto, há 2^k subconjuntos desse tipo. Contabilizando ambas as possibilidades, concluímos que I_{k+1} tem, ao todo, $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos.

23. Inicialmente, afirmamos que, se todo quadrado pode ser particionado em k outros quadrados, então todo quadrado pode ser particionado em $k+3$ quadrados. De fato, partindo de um quadrado Q, divida-o em quatro outros quadrados; em seguida, particione um desses quatro quadrados em k outros quadrados, obtendo uma partição de Q em $4 - 1 + k = k + 3$ quadrados. Para terminar, é suficiente mostrar como particionar um quadrado qualquer em 6, 7 e 8 outros quadrados. O argumento acima trivializa o caso de 7 quadrados, uma vez que sabemos particionar todo quadrado em 4 quadrados e, portanto, também em $4+3=7$ quadrados. Para os casos de 6 ou 8 quadrados, comece particionando um quadrado dado em m^2 outros quadradinhos iguais, de maneira análoga à decomposição de um tabuleiro de xadrez em suas $64 = 8^2$ casas. Em seguida, escolha $(m-1)^2$ desses quadradinhos, de modo a formar um quadrado maior, contido no quadrado original e tendo um canto em comum com o mesmo. Restaram $m^2 - (m-1)^2 = 2m - 1$ quadradinhos, de forma que o quadrado original ficou particionado e $1 + (2m-1) = 2m$ outros quadrados. Por fim, fazendo $m = 3$ ou $m = 4$, obtemos partições do quadrado original em 6 ou 8 quadrados.

24. Tome um tabuleiro $2^k \times 2^k$ e o divida em quatro tabuleiros $2^{k-1} \times 2^{k-1}$; em seguida, posicione a peça 1×1 e um L-tridominó de forma que, juntas, elas cubram o quadrado 2×2 no centro do tabuleiro maior e com lados paralelos aos lados do mesmo. Por fim, encaixe uma hipótese de indução para concluir o que se pede.

25. Se $4^{3^{k-1}} - 1 = 3^k q$, para algum $q \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}4^{3^k} - 1 &= (4^{3^{k-1}})^3 - 1 = (4^{3^{k-1}} - 1)[(4^{3^{k-1}})^2 + 4^{3^{k-1}} + 1]\\ &= 3^k q[((4^{3^{k-1}})^2 - 1) + (4^{3^{k-1}} - 1) + 3]\\ &= 3^k q[(4^{3^{k-1}} - 1)(4^{3^{k-1}} + 1) + 3^k q + 3]\\ &= 3^k q[3^k q(4^{3^{k-1}} + 1) + 3^k q + 3]\\ &= 3^{k+1} q[3^{k-1} q(4^{3^{k-1}} + 1) + 3^{k-1} q + 1].\end{aligned}$$

26. Se $k \geq 6$ e $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são inteiros tais que

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} = 1,$$

então

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{(2a_1)^2}+\frac{1}{(2a_2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2a_k)^2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1.$$

Há, portanto, três casos iniciais a considerar: $k=6$, $k=7$ e $k=8$. Antes de considerá-los, observe que

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}++\frac{1}{4}=1.$$

Portanto, para $k=6$, temos

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=1;$$

para $k=7$, temos

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=1;$$

para $k=8$, temos

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=1.$$

27. Consideremos, primeiramente, o caso $n=3$. Sejam A, B e C as crianças e suponha, sem perda de generalidade, que $AB<BC<CA$. Nesse caso, A atira em B e B em A, de modo que C fica enxuta. Suponha agora, por hipótese de indução, que com $n=2k-1$ crianças, onde $k>1$ é inteiro, ao menos uma delas sempre fica enxuta. Consideremos $2k+1$ crianças, posicionadas de modo a satisfazer as condições do enunciado. Como as distâncias entre os pares de crianças são duas a duas distintas, existem duas crianças A e B tais que a distância de A a B é a menor de todas. Assim, A atira em B e vice-versa. Descartando as crianças A e B, restam $2k-1$ crianças satisfazendo as condições do enunciado. Há agora duas possibilidades:

   - Uma delas atira em A ou B: nesse caso, no máximo $2k-2$ tiros foram disparados em direção a alguma das $2k-1$ crianças restantes e, assim, ao menos uma delas fica enxuta.

   - Nenhuma das $2k-1$ crianças restantes atira em A ou B: pela hipótese de indução, ao menos uma delas fica enxuta.

28. Se $(k+1)! \leq n < (k+2)!$, seja a_{k+1} o maior natural tal que

$$a_{k+1}(k+1)! \leq n < (a_{k+1}+1)(k+1)!.$$

Então

$$a_{k+1}(k+1)! \leq n < (k+2)! = (k+2)\cdot(k+1)!$$

garante que $a_{k+1} \leq k+1$; por outro lado, como

$$n - a_{k+1}(k+1)! < (a_{k+1}+1)(k+1)! - a_{k+1}(k+1)! = (k+1)!,$$

segue por hipótese de indução que

$$n - a_{k+1}(k+1)! = a_1\cdot 1! + a_2\cdot 2! + \cdots + a_k\cdot k!,$$

para certos inteiros a_1, a_2, ..., a_k, tais que $0 \leq a_j \leq j$, para $1 \leq j \leq k$.

Suponha que já mostramos a unicidade para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq (k+1)!$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $(k+1)! \leq n < (k+2)!$ e

$$n = a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\cdots+a_{k+1}\cdot(k+1)! = b_1\cdot 1!+b_2\cdot 2!+\cdots+b_{k+1}\cdot(k+1)!,$$

com $0 \leq a_j, b_j \leq j$, para todo $j \geq 1$. Então, pelo resultado do exemplo 4.26, temos

$$\begin{aligned} a_{k+1}\cdot(k+1)! &\leq n = b_1\cdot 1! + b_2\cdot 2! + \cdots + b_{k+1}\cdot(k+1)! \\ &\leq 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + k\cdot k! + b_{k+1}\cdot(k+1)! \\ &= (b_{k+1}+1)\cdot(k+1)! - 1 < (b_{k+1}+1)\cdot(k+1)!, \end{aligned} \tag{8.1}$$

de sorte que $a_{k+1} \leq b_{k+1}$. Analogamente, $b_{k+1} \leq a_{k+1}$ e, assim, $a_{k+1} = b_{k+1}$. Portanto, temos

$$n - a_{k+1}\cdot(k+1)! = a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\cdots+a_k\cdot k! = b_1\cdot 1!+b_2\cdot 2!+\cdots+b_k\cdot k!,$$

com (novamente pelo resultado do exemplo 4.26)

$$n - a_{k+1}\cdot(k+1)! \leq 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + k\cdot k! = (k+1)! - 1.$$

Segue, pois, da hipótese de indução que $a_j = b_j$, para $1 \leq j \leq k$.

29. Façamos a prova por indução sobre m. Para $m = 1, 2, 3$ o resultado é imediato. Suponha então que, para um certo $n \geq 3$, todo $m \leq F_n$ possa ser escrito unicamente da maneira pedida e tome $F_n < m \leq F_{n+1}$. Se $m = F_{n+1}$ nada há a fazer. Senão,

$$0 < m - F_n < F_{n+1} - F_n = F_{n-1} < F_n.$$

Por hipótese de indução existem $r \geq 1$ e inteiros $1 < t_1 < \cdots < t_r < n$ tais que

$$m - F_n = F_{t_1} + \cdots + F_{t_r},$$

com $t_{j+1} - t_j > 1$ para $1 \leq j < r$. Daí, $m = F_{t_1} + \cdots + F_{t_r} + F_n$ e afirmamos que $n - t_r > 1$. De fato, se $n - t_r = 1$ teríamos

$$m \geq F_n + F_{t_r} = F_n + F_{n-1} = F_{n+1},$$

contradizendo o fato de ser $m < F_{n+1}$. Está assim garantida, por indução, a existência de uma representação de todo natural conforme pedido.

Passemos, agora, à prova da unicidade da representação, a qual também será feita por indução sobre m. Por hipótese de indução podemos supor que se $m \leq F_n$ então a representação acima é única. Para garantirmos a unicidade da representação para os $m \in \mathbb{N}$ tais que $F_n < m \leq F_{n+1}$, consideremos dois casos:

(a) $m = F_{n+1}$: há dois subcasos. Primeiro, suponha

$$F_{n+1} = F_{t_1} + F_{t_2} + \cdots + F_{t_r},$$

onde $r \geq 1$, $1 < t_1 < t_2 < \cdots < t_r < n$ e $t_{j+1} - t_j > 1$ para $1 \leq j < r$. Então

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_{t_1} + F_{t_2} + \cdots + F_{t_r} < F_{t_1-1} + F_{t_1} + F_{t_2} + \cdots + F_{t_r} \\ &= F_{t_1+1} + F_{t_2} + \cdots + F_{t_r} < F_{t_2-1} + F_{t_2} + F_{t_3} + \cdots + F_{t_r} \\ &= F_{t_2+1} + F_{t_3} + \cdots + F_{t_r} < F_{t_3-1} + F_{t_3} + \cdots + F_{t_r} \\ &= \cdots \\ &< F_{t_r+1} \leq F_n < F_{n+1}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Agora, se $F_{n+1} = F_{t_1} + \cdots + F_{t_r} + F_n$ então

$$F_{t_1} + \cdots + F_{t_r} = F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$$

e, pela unicidade da representação de F_{n-1}, teríamos que outra representação de F_{n+1} seria $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, a qual não satisfaz as condições do enunciado.

(b) $F_n < m < F_{n+1}$: mostremos que F_n é necessariamente um termo da representação. De fato, se

$$m = F_{t_1} + \cdots + F_{t_r},$$

com $t_r < n$, então um argumento análogo ao do primeiro subcaso do caso (a) nos daria o absurdo de que $m \leq F_n$. Portanto, para uma representação de m como no enunciado, devemos ter forçosamente

$$m = F_{t_1} + \cdots + F_{t_r} + F_n,$$

com $t_r < n - 1$. Daí, como $m - F_n < F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$, a unicidade da representação de m segue da unicidade da representação de $m - F_n$.

Seção 6.1

1. Basta observar que $\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n}\binom{2n-1}{n-1} = 2\binom{2n-1}{n-1}$.

2. Adapte a ideia da solução do exemplo 6.6.

3. Compare $\binom{n}{k}$ com $\binom{n}{k+1}$ utilizando a definição.

4. Faça uma prova por indução.

5. Aplique a relação de Stiefel ao numerador da fração do somatório e, em seguida, use somas telescópicas.

6. Faça uma prova por indução, aplicando a relação de Stiefel para o passo de indução.

7. Defina a_n como a soma do segundo membro da igualdade que desejamos estabelecer. Em seguida, mostre que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e, utilizando a relação de Stiefel, que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, para todo $n \geq 1$.

8. Faça indução sobre n; mais precisamente, mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ possui $\binom{n}{k}$ subconjuntos de k elementos, para todo $0 \leq k \leq n$. Para o passo de indução, note que os subconjuntos de k elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ são de um, dentre dois tipos possíveis: aqueles que não contêm $n+1$ – sendo, portanto, subconjuntos de k elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ – e aqueles que contêm $n+1$ – sendo, portanto, iguais a um conjunto do tipo $A \cup \{n+1\}$, onde A é um subconjunto de $k-1$ elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Seção 6.2

1. Use a fórmula do binômio para expandir $4^n = (1+3)^n$.

2. Segue do problema anterior que $A = 4^n$ e (argumentando analogamente àquele problema) $B = 12^{n-1}$. Portanto,

$$\frac{3^8}{4} = \frac{B}{A} = \frac{12^{n-1}}{4^n} = \frac{3^{n-1}}{4},$$

de modo que $n = 9$.

3. Calcule os três primeiros termos do desenvolvimento binomial de $(1,1)^n = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^n$.

4. A soma em questão é igual a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{11!}\left(\frac{11!}{1!10!} + \frac{11!}{3!8!} + \frac{11!}{5!6!} + \frac{11!}{7!4!} + \frac{11!}{9!2!} + \frac{11!}{11!0!}\right) = \\
&= \frac{1}{11!}\left(\binom{11}{1} + \binom{11}{3} + \binom{11}{5} + \binom{11}{7} + \binom{11}{9} + \binom{11}{11}\right) \\
&= \frac{1}{11!} \cdot 2^{11-1}.
\end{aligned}$$

5. O termo geral de tal desenvolvimento é $\binom{65}{k}\frac{1}{3^k}$. Agora, expandindo os números binomiais envolvidos, obtemos

$$\binom{65}{k}\frac{1}{3^k} < \binom{65}{k+1}\frac{1}{3^{k+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{65-k} < \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{3}$$

ou, ainda, se, e só se, $65 - k > 3(k+1)$, i.e., $k \leq 15$. Analogamente,

$$\binom{65}{k}\frac{1}{3^k} > \binom{65}{k+1}\frac{1}{3^{k+1}} \Leftrightarrow k \geq 16,$$

de sorte que o maior termo do desenvolvimento é $\binom{65}{16}\frac{1}{3^{16}}$.

6. A condição do enunciado é equivalente a

$$a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd.$$

Por outro lado, pela fórmula do desenvolvimento binomial, temos $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$ se, e só se,

$$a^4 + b^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 = c^4 + d^4 + 2c^3d + 3c^2d^2 + 2cd^3.$$

Por fim, basta observar que

$$a^4 + b^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 = (a^2 + b^2 + ab)^2$$

e, analogamente,

$$c^4 + d^4 + 2c^3d + 3c^2d^2 + 2cd^3 = (c^2 + d^2 + cd)^2.$$

7. Use o resultado do problema 3, página 148 – com $2n$ no lugar de n – juntamente com o teorema das linhas do triângulo de Pascal.

8. Adapte, ao presente caso, a ideia da solução do exemplo 6.15.

9. Basta ver que

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} ja^j = \sum_{j=1}^{n} an\binom{n-1}{j-1}a^{j-1} = an(1+a)^{n-1}$$

e

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}j^2 = \sum_{j=1}^{n} n\binom{n-1}{j-1}j = \sum_{j=1}^{n} n\binom{n-1}{j-1}(j-1) + \sum_{j=1}^{n} n\binom{n-1}{j-1}$$
$$= \sum_{j=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{j-2} + n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}$$
$$= n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1}.$$

10. Use a fórmula para o termo geral de uma PA e o resultado do problema anterior.

11. Escreva $\frac{1}{q} = 1 + a$, com $a > 0$, e use o fato de $(1+a)^n \geq 1 + na$.

12. Fazendo $\alpha = \sqrt{a} + \sqrt[n]{b}$, obtemos $(\alpha - \sqrt{a})^n = b$. Agora, argumentando como na prova do exemplo 6.11, concluímos que

$$(\alpha - \sqrt{a})^n = (\alpha^n + a_{n-2}\alpha^{n-2} + a_{n-4}\alpha^{n-4} + \cdots) +$$
$$+ (a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-3}\alpha^{n-3} + \cdots)\sqrt{a},$$

para certos inteiros $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$. Portanto,

$$[(\alpha^n + a_{n-2}\alpha^{n-2} + a_{n-4}\alpha^{n-4} + \cdots) - b]^2 =$$
$$= a(a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-3}\alpha^{n-3} + \cdots)^2.$$

de sorte que α é raiz da equação polinomial (de grau $2n$)

$$[(x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + \cdots) - b]^2 -$$
$$- a(a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots)^2 = 0.$$

13. Vamos descobrir primeiro qual o valor constante que a expressão deve ter. Para tanto, substituindo $x = 2$ e $y = z = -1$ (observe que $x + y + z = 0$), obtemos $x^5 + y^5 + z^5 = 30$ e $xyz(xy + yz + zx) = -6$ e, daí, $\frac{x^5+y^5+z^5}{xyz(xy+yz+zx)} = -5$. Portanto, devemos provar que $\frac{x^5+y^5+z^5}{xyz(xy+yz+zx)} = -5$, para todo terno de reais não nulos x, y e z, tais que $x + y + z = 0$.

Para tanto, veja que

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 + z^5 &= x^5 + y^5 + (-x-y)^5 = x^5 + y^5 - (x+y)^5 \\ &= x^5 + y^5 - (x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) \\ &= -(5x^4y + 5xy^4 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3) \\ &= -5xy[(x^3 + y^3) + 2xy(x+y)] \\ &= -5xy(x+y)[(x^2 - xy + y^2) + 2xy] \\ &= -5xy(-z)[(x^2 + 2xy + y^2) - xy] \\ &= 5xyz[(x+y)(x+y) - xy] = 5xyz[(x+y)(-z) - xy] \\ &= -5xyz(xy + yz + zx). \end{aligned}$$

14. Aplicando a fórmula do desenvolvimento binomial duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} (x+y+z)^n &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(x+y)^{n-l}z^l \\ &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{k=0}^{n-l}\binom{n-l}{k}x^{n-l-k}y^k z^l \\ &= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-l}\binom{n}{l}\binom{n-l}{k}x^{n-l-k}y^k z^l. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\binom{n}{l}\binom{n-l}{k} = \frac{n!}{(n-k-l)!k!l!},$$

de forma que basta fazer $j = n - k - l$ para obter a fórmula do enunciado.

16. O termo geral do desenvolvimento do trinômio do enunciado é

$$\binom{10}{j,k,l}1^j x^k \left(\frac{1}{x}\right)^l = \binom{10}{j,k,l}x^{k-l},$$

com $j + k + l = 10$. Portanto, devemos ter $k + l = 10 - j$ e $k - l = 0$, de sorte que $k = l = 5 - \frac{j}{2}$ e, portanto, j deve ser par. Faça, agora,

$j = 0, 2, 4, 6, 8$ e 10 e some todas as parcelas

$$\binom{10}{j, 5-\frac{j}{2}, 5-\frac{j}{2}}$$

correspondentes.

17. Use a fórmula (6.7) do problema 14 acima para observar que

$$\sum_{j+k+l=n}\binom{n}{j,k,l} = (1+1+1)^n \text{ e } \sum_{j+k+l=n}(-1)^l\binom{n}{j,k,l} = (1+1-1)^n.$$

18. Faça indução sobre $n \geq 1$; para a execução do passo de indução você precisará utilizar a relação de Stiefel e a recorrência que define a sequência de Fibonacci.

19. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=0}^{995}(-1)^k\frac{1991}{1991-k}\binom{1991-k}{k} = 1.$$

Para tanto, veja que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{995}(-1)^k\frac{1991}{1991-k}\binom{1991-k}{k} = \\
&= \sum_{k=0}^{995}(-1)^k\binom{1991-k}{k} + \sum_{k=0}^{995}(-1)^k\frac{k}{1991-k}\binom{1991-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{995}(-1)^k\binom{1991-k}{k} + \sum_{k=0}^{995}(-1)^k\binom{1990-k}{k-1}.
\end{aligned}$$

Para n inteiro positivo, defina

$$S_n = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-k}{k},$$

pondo $\binom{n-k}{k} = 0$ para $k > n-k$. EntÃ£o $S_0 = S_1 = 1$ e, pelo teorema das colunas, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n-2} S_m &= \sum_{m=0}^{n-2}\left(\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{m-k}{k}\right) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\sum_{m=2k}^{n-2}\binom{m-k}{k} \\
&= \sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-1-k}{k+1} = 1 - S_n
\end{aligned}$$

ou, ainda, $S_n = 1 - \sum_{m=0}^{n-2} S_m$. A partir daí, é imediato provar que, para todo inteiro não negativo n, tem-se

$$S_{n+1} = S_n - S_{n-1}.$$

Pela recorrência acima, temos $S_2 = 0$, $S_3 = S_4 = -1$, $S_5 = 0$, $S_6 = S_7 = 1$ e, após uma fácil indução, que, se 6 divide $m-n$, então $S_m = S_n$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{995}(-1)^k\frac{1991}{1991-k}\binom{1991-k}{k} &= S_{1991} - S_{1989} \\
&= S_5 - S_3 = 0 - (-1) = 1.
\end{aligned}$$

Seção 7.1

1. Faça indução sobre $n \geq 2$.

2. Agrupe adequadamente as parcelas em pares e, em seguida, aplique a desigualdade triangular para se livrar da variável x.

3. Para o item (a), observe que

$$\frac{y}{1+y} - x1 + x = \frac{y(1+x) - x(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \geq 0.$$

Assim, como $|a+b| \leq |a| + |b|$, segue de (a) que

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

Seção 7.2

2. Veja primeiro que

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^3}{b} - a^2\right) + \left(\frac{b^3}{a} - b^2\right) &= \frac{a^2(a-b)}{b} + \frac{b^2(b-a)}{a} \\ &= (a-b)\left(\frac{a^2}{b} - a^2\right) = (a-b)\left(\frac{a^3-b^3}{ab}\right) \\ &= \frac{1}{ab}(a-b)^2(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

Basta, então, mostrarmos que $a^2+ab+b^2 \geq 0$. Para isso, note que:

$$a^2+ab+b^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} > 0.$$

É claro que haverá igualdade se e só se $a = b$.

3. Para $x \neq a, b, c$, resolver a equação do enunciado equivale a resolver a equação de segundo grau

$$(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b) = 0.$$

Por sua vez, o discriminante de tal equação é igual a

$$4(a+b+c)^2 - 12(ab+ac+bc) = 4[(a^2+b^2+c^2) - (ab+ac+bc)] \geq 0.$$

4. Escreva o primeiro membro como $a(a+b+c)+bc$ e, em seguida, aplique a desigualdade (7.6).

5. Sendo x o comprimento do lado do quadrado que deve ser recortado de cada canto da folha, ficaremos com uma caixa de dimensões $2-2x$, $3-2x$ e x. Escolha números reais positivos a, b e c tais que $a(2-2x)+b(3-2x)+cx$ independa de x e $a(2-2x) = b(3-2x) = cx$. Em seguida, aplique a desigualdade entre as médias a fim de maximizar o volume da caixa.

6. Mostre, inicialmente, que $a^3+b^3 \geq (a+b)ab$. Em seguida, deduza a partir daí que $\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{c}{abc(a+b+c)}$, obtendo desigualdades análogas para as outras duas parcelas do primeiro membro. Em seguida, some ordenadamente as três desigualdades assim obtidas.

7. Aplicando a transformação de Ravi, concluímos ser suficiente provar que

$$(y+z)(x+z)(x+y) \geq 8xyz,$$

para todos $x, y, z > 0$. Para tanto, utilize três vezes a desigualdade (7.6).

8. Aplique a transformação de Ravi para escrever o primeiro membro como

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z}\right).$$

Em seguida, utilize a desigualdade entre as médias para seis números.

9. Agrupando adequadamente as parcelas do primeiro membro em pares e utilizando a desigualdade (7.11), obtemos

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{c+a}{c+d} = (a+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d}\right) \geq (a+c)\cdot\frac{4}{(a+b)+(c+d)}$$

e

$$\frac{b+d}{b+c} + \frac{d+b}{d+a} = (b+d)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+d}\right) \geq (b+d)\cdot\frac{4}{(b+c)+(a+d)}.$$

Agora, basta somar membro a membro as duas desigualdades acima.

10. Fatorando o numerador do primeiro membro e simplificando a fração assim obtida, concluímos que basta mostrar a desigualdade

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n-1} + x^{2n} \geq (2n+1)x^n$$

ou, ainda,

$$(1 + x^{2n}) + (x + x^{2n-1}) + \cdots + (x^{n-1} + x^{n+1}) \geq 2nx^n.$$

Para tanto, é suficiente aplicar a desigualdade (7.5) n vezes, somando as desigualdades assim obtidas.

11. Segue de (7.8) que

$$3a^4 + b^4 = a^4 + a^4 + a^4 + b^4 \geq 4\sqrt[4]{a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 \cdot b^4} = 4|a^3b| \geq 4a^3b.$$

12. Já mostramos que, para todos x, y e z reais positivos, tem-se

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Multiplicando ambos os membros por $a + b + c > 0$, obtemos

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)(ab + bc + ca)$$

ou, ainda (após desenvolver ambos os membros e cancelar os termos semelhantes),

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

13. Uma vez que

$$(ab + bc + ca)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2abc(a + b + c),$$

basta provar que

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq abc(a + b + c).$$

Fazendo $x = ab, y = bc, z = ca$ em (7.7), obtemos

$$\begin{aligned} (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &\geq xy + yz + zx \\ &= abc(a + b + c). \end{aligned}$$

14. Aplique novamente a desigualdade (7.7).

15. Expanda o segundo membro utilizando a identidade (2.5). Após efetuar as simplificações óbvias, aplique três vezes ao primeiro membro a desigualdade do Exemplo 2.4. Em seguida, utilize a desigualdade (7.9).

16. Seja $S = a^4(1+b^4)+b^4(1+c^4)+c^4(1+a^4)$. Aplicando sucessivamente a desigualdade entre as médias para dois e três números, obtemos

$$\begin{aligned} S &\geq a^4 \cdot 2b^2 + b^4 \cdot 2c^2 + c^4 \cdot 2a^2 \\ &\geq 3\sqrt[3]{(2a^4b^2)(2b^4c^2)(2c^4a^2)} \\ &= 6\sqrt[3]{a^6b^6c^6} \\ &= 6a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

17. Aplique a desigualdade entre as médias.

18. Troque a_i por $-a_i$ e, em seguida, aplique a desigualdade entre as médias.

19. Para o item (a), segue da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n \leq \left(\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Para o item (b), argumente como em (a), aplicando a desigualdade entre as médias aos números 1^2, 2^2, ..., n^2 e utilizando o resultado do exemplo 6.6.

20. Para $1 \leq k \leq m-1$, aplique a desigualdade entre as médias à soma $x + k = x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k}$. Em seguida, multiplique as $m - 1$ desigualdades assim obtidas.

21. Como $\sum_{j=1}^{n}(S - x_j) = (n-1)S$, a desigualdade do enunciado equivale a

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(S - x_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{S - x_j}\right) \geq n^2.$$

Basta, então, aplicar a desigualdade (7.11).

22. Para o item (a), desenvolva o produto do primeiro membro. Para o item (b), aplique o resultado do problema 8, página 149 (com $k = 2$) para concluir que o somatório do segundo membro do item (a) possui $\frac{1}{2}n(n-1)$ parcelas; em seguida, use a desigualdade entre as médias para dois números para concluir que $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geq 2$, para todos $1 \leq i < j \leq n$.

23. Veja que

$$k_1 k_2 \ldots k_n \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n,$$

onde $p_i = k_1 \ldots k_{i-1}\widehat{k_i}k_{i+1} \ldots k_n$ e o circunflexo sobre k_i indica que o produto contém $k_1, k_2, \ldots, k_n$, à exceção de k_i. Podemos escrever

$$\frac{a_1^{k_1}}{k_1} + \frac{a_2^{k_2}}{k_2} + \cdots + \frac{a_n^{k_n}}{k_n} = \frac{p_1 a_1^{k_1} + p_2 a_2^{k_2} + \cdots + p_n a_n^{k_n}}{k_1 k_2 \ldots k_n}.$$

Agora, expandindo a soma no numerador de modo que cada $a_i^{k_i}$ apareça p_i vezes e usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$\frac{1}{k_1 k_2 \ldots k_n}[(\underbrace{a_1^{k_1} + \cdots + a_1^{k_1}}_{p_1 \text{ vezes}}) + \cdots + (\underbrace{a_n^{k_n} + \cdots + a_n^{k_n}}_{p_n \text{ vezes}}) \geq$$

$$\geq \left((a_1)^{k_1})^{p_1} \ldots (a_n)^{k_n})^{p_n}\right)^{\frac{1}{k_1 k_2 \ldots k_n}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{p_i k_i}{k_1 k_2 \ldots k_n}} = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

24. Faça $a_0 = 0$ e aplique a desigualdade (7.11) para obter

$$\frac{1}{a_j - a_{j-1}} + \cdots + \frac{1}{a_1 - a_0} \geq \frac{j^2}{a_j}.$$

Em seguida, some membro a membro as desigualdades acima para $1 \leq j \leq n$ e agrupe os termos iguais para obter a desigualdade procurada. Por fim, conclua que há igualdade se e só se a sequência $(a_k)_{k \geq 1}$ for uma PA.

25. Substituindo a, b e c na desigualdade desejada respectivamente por $6x^6$, $6y^6$ e $6z^6$, mostre que basta provarmos a desigualdade

$$7x^{12} + 12x^6y^6 + 7y^6z^6 + 9y^{12} + 9x^6z^6 \geq$$

$$\geq 2x^3y^9 + 6x^9y^3 + 6x^2y^8z^2 + 12x^5y^5z^2 + 6x^4y^4z^4 + 6xy^7z^4 + 6x^8y^2z^2.$$

Para tanto, escreva a expressão do primeiro membro como a soma de sete outras expressões tais que, aplicando a desigualdade entre as médias a cada uma delas, obtenhamos as sete parcelas do segundo membro; por exemplo,

$$2x^6z^6 + 2x^6z^6 + 2x^{12} + 2y^{12} + 2y^{12} + 2x^6y^6 \geq 12x^5y^5z^2.$$

Seção 7.3

1. Pela desigualdade de Cauchy, temos

$$12 = 3x + 4y \leq \sqrt{3^2 + 4^2}\sqrt{x^2 + y^2} = 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Portanto, $x^2 + y^2 \geq \frac{144}{25}$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$. Mas, como $3x + 4y = 12$, a igualdade ocorre se, e só se, $x = \frac{36}{25}$ e $y = \frac{48}{25}$.

2. Adapte a discussão, apresentada no texto, para o caso $n = 3$.

3. Fazendo $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$ na desigualdade de Cauchy, obtemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{n},$$

com igualdade se, e só se, existir um real não nulo λ tal que $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = \cdots = \frac{a_n}{1} = \lambda$, i.e., se, e só se, os números $a_1, \ldots, a_n$ forem todos iguais. Dividindo ambos os membros da desigualdade acima por n, obtemos a desigualdade do enunciado.

4. Aplique a desigualdade do problema anterior ao numerador de cada parcela do somatório acima. Em seguida, some os resultados assim obtidos.

5. Queremos provar que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) \geq n^2,$$

para todos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos. Para tanto, faça $a_j = \sqrt{x_j}$, $b_j = \frac{1}{\sqrt{x_j}}$ e aplique a desigualdade de Cauchy.

6. Multiplique ambos os membros por $a+b+c+d$ e use a desigualdade de Cauchy para quatro números, com $a_1 = \sqrt{a}$, $a_2 = \sqrt{b}$, $a_3 = \sqrt{c}$, $a_4 = \sqrt{d}$ e $b_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $b_3 = \frac{2}{\sqrt{c}}$, $b_4 = \frac{4}{\sqrt{d}}$. Alternativamente, aplique a desigualdade (7.11), escrevendo $c = \frac{c}{2} + \frac{c}{2}$ e $\frac{4}{c} = \frac{1}{c/2} + \frac{1}{c/2}$, $d = \frac{d}{4} + \frac{d}{4} + \frac{d}{4} + \frac{d}{4}$ e $\frac{16}{d} = \frac{1}{d/4} + \frac{1}{d/4} + \frac{1}{d/4} + \frac{1}{d/4}$.

7. Para a primeira desigualdade, seja $S = \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3} + \sqrt{2z+3}$. Aplicando a desigualdade entre as médias para três números, obtemos

$$\begin{aligned} S &\geq 3\sqrt[6]{(2x+3)(2y+3)(2z+3)} \\ &= 3\sqrt[6]{8xyz + 12(xy+xz+yz) + 18(x+y+z) + 27} \\ &> 3\sqrt[6]{18 \cdot 3 + 27} = 3\sqrt[3]{9}. \end{aligned}$$

Para a segunda desigualdade, aplique a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética para três números – cf. problema 3 – com $a_1 = \sqrt{2x+3}$, $a_2 = \sqrt{2y+3}$ e $a_3 = \sqrt{2z+3}$, juntamente com o fato de que $x + y + z = 3$.

8. Aplique a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética – cf. problema 3 – com $a_k = \sqrt{\binom{n}{k}}$, juntamente com o item (a) do corolário 6.13.

9. Pela desigualdade de Cauchy, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right)\left(\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2}\right) &\geq \left(\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z} + \frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x} + \frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right)^2. \end{aligned}$$

10. Uma vez que

$$\frac{a_k^2}{a_k + b_k} = \frac{a_k^2 - b_k^2 + b_k^2}{a_k + b_k} = (a_k - b_k) + \frac{b_k^2}{a_k + b_k},$$

obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} = \sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k + b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k + b_k}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 + b_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k).$$

Então, basta mostrarmos que

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \frac{x + y}{2},$$

para todos os reais positivos x e y, o que decorre imediatamente da desigualdade entre as médias quadrática e aritmética.

11. Faça $a_{n+1} = a_1$. Para $1 \leq j \leq n$, podemos escrever, usando a desigualdade de Cauchy,

$$(1 + a_j)^2 = \left(1 \cdot 1 + \sqrt{a_{j+1}} \cdot \frac{a_j}{\sqrt{a_{j+1}}}\right)^2 \leq (1 + a_{j+1})\left(1 + \frac{a_j^2}{a_{j+1}}\right),$$

de modo que

$$1 + \frac{a_j^2}{a_{j+1}} \geq \frac{(1 + a_j)^2}{1 + a_{j+1}}.$$

Multiplicando membro a membro as desigualdades assim obtidas para $j = 1, 2, \ldots, n$, chegamos à desigualdade desejada.

12. Opere a transformação de Ravi – cf. parágrafo que antecede o problema 7, página 174 – para mostrar que a desigualdade em questão equivale à desigualdade

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} + \sqrt{x+y},$$

para x, y e z reais positivos. Em seguida, observe que, pela desigualdade entre as médias quadrática e aritmética, temos

$$\sqrt{\frac{y+z}{2}} \geq \frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $y=z$; analogamente,

$$\sqrt{\frac{x+z}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}}{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.$$

Somando membro a membro essas três desigualdades, obtemos a desigualdade desejada.

13. Pela desigualdade de Cauchy, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right).$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k^2 \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^4\right)}$$

Por outro lado, a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética nos dá

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \sqrt{n\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4\right)}.$$

Basta, agora, juntar as desigualdades acima.

14. Faça $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$ e $z=\frac{1}{c}$ e, em seguida, aplique a desigualdade de Cauchy para obter

$$((y+z)+(x+z)+(x+y))\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right) \geq (x+y+z)^2.$$

Por fim, aplique a desigualdade entre as médias.

Seção 7.4

1. Comece obsevando que

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$$

Em seguida, aplique a desigualdade de Bernoulli.

2. Escreva $a^m = m^m\left(1+\frac{a-m}{m}\right)^m$ e, em seguida, aplique a desigualdade de Bernoulli. Faça o mesmo com a^n e, por fim, some os resultados.

3. A desigualdade do enunciado equivale a

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} \geq ab+ac+bc.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $a \leq b \leq c$. Então, $a^6 \leq b^6 \leq c^6$ e $\frac{1}{b^2c^2} \leq \frac{1}{a^2c^2} \leq \frac{1}{a^2b^2}$. Aplicando sucessivamente as desigualdades de Chebyshev e das médias, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2} &\geq \frac{1}{3}(a^6+b^6+c^6)\left(\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2}\right)\\ &\geq a^2b^2c^2\left(\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2}\right)\\ &= a^2+b^2+c^2.\end{aligned}$$

Por fim, como já sabemos que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bd$, nada mais há a fazer.

4. Escreva $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{1994}^4 = x_1^3\cdot x_1+x_2^3\cdot x_2+\cdots+x_{1994}^3\cdot x_{1994}$ e, em seguida, aplique a desigualdade de Chebyshev para obter

$$x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{1994}^4 \geq \frac{1}{1994}(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{1994}^3)(x_1+x_2+\cdots+x_{1994}).$$

Por fim, use as equações do sistema.

5. Aplique a desigualdade de Chebyshev a cada parcela do somatório acima.

6. Vamos mostrar que, para todo $n > 1$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) \geq 0.$$

Para tanto, observe que o primeiro membro é igual à expressão

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\lambda_1 + \cdots + \widehat{\lambda_i} + \cdots + \lambda_n)a_i b_i - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \lambda_j a_i b_j, \tag{8.2}$$

onde $\widehat{\lambda_i}$ indica que λ_i não aparece na soma. Veja agora que, para cada par (i,j) com $i < j$, a soma

$$\lambda_i\lambda_j a_i b_i + \lambda_i\lambda_j a_j b_j - \lambda_i\lambda_j a_i b_j - \lambda_i\lambda_j a_j b_i = -\lambda_i\lambda_j(a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

aparecerá em (8.2) exatamente uma vez, o que significa que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) \lambda_i\lambda_j(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0.$$

A igualdade ocorre quando todos os a_i's forem iguais ou todos os b_i's forem iguais. Finalmente, a desigualdade de Chebyshev usual corresponde ao caso particular em que $\lambda_i = \frac{1}{n}$, para $1 \leq i \leq n$.

7. Aplique a desigualdade de Chebyshev para concluir que a expressão do primeiro membro é maior ou igual que

$$\frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c}\right).$$

Em seguida, aplique o resultado do corolário 7.21, juntamente com a desigualdade (7.11), para concluir que a última expressão acima é maior ou igual que

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3 \cdot \frac{4^2}{3(a+b+c+d)} = \frac{(a+b+c+d)^2}{12}.$$

Por fim, observe que a condição do enunciado equivale a $(a+c)(b+d) = 1$ e aplique a desigualdade entre as médias.

8. Por simetria podemos supor, sem perda de generalidade, que $a \geq b \geq c$. Desse modo, obtemos $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b}$. Aplicando a desigualdade de Chebyshev e (7.11), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} &\geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right)(a^n + b^n + c^n) \\ &\geq \frac{3}{2(a+b+c)}(a^n + b^n + c^n).\end{aligned}$$

Também pela desigualdade de Chebyshev, segue que

$$a^n + b^n + c^n \geq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}),$$

o que completa a demonstração.

9. Supondo, sem perda de generalidade, $x \geq y \geq z$, use a desigualdade de Chebyshev para concluir que a expressão do enunciado é maior ou igual que

$$\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right) \cdot \frac{(x+1)+(y+1)+(z+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

Em seguida, aplique a desigualdade de Chebyshev ao primeiro fator e a desigualdade entre as médias ao segundo fator para concluir que a última expressão acima é maior ou igual que $\frac{3t^3}{(t+1)^2}$, onde $t = \frac{1}{3}(x+y+z)$. Por fim, use a desigualdade entre as médias para concluir que $t \geq 1$ e, em seguida, prove que $t \geq s \Rightarrow \frac{3t^3}{(t+1)^2} \geq \frac{3s^3}{(s+1)^2}$.

10. Para obter a primeira desigualdade, aplique a desigualdade de Chebyshev ao primeiro somatório, seguida do resultado do corolário 7.11. Para a segunda desigualdade, utilize a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática.

11. Suponha, sem perda de generalidade, que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2n}$ e arranje tais números em n pares (b_1, c_1), (b_2, c_2), $\ldots$, (b_n, c_n), com $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ e $b_j \leq c_j$, para todo j. Queremos maximizar

$$S = b_1c_1 + b_2c_2 + \cdots + b_nc_n.$$

Para isso, vamos mostrar que $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$. De fato, se a sequência (c_i) não for não decrescente, existirão índices $i > j$ tais que $c_i \leq c_j$. Neste caso, trocamos as posições de c_i e c_j em S, após o que a nova soma será

$$S' = S - b_i c_i - b_j c_j + b_i c_j + b_j c_i = S + (b_i - b_j)(c_j - c_i) \geq S.$$

Logo, a soma será máxima quando $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$. Finalmente, observe que, para todos $i < j$, temos $b_i \leq c_i \leq c_j$. Suponha que, para algum par $i < j$, tivéssemos $b_j \leq c_i$. Neste caso, trocamos c_i por b_j, de modo que a nova soma seja

$$S'' = S - b_i c_i - b_j c_j + b_i b_j + c_i c_j = S + (b_i - c_j)(b_j - c_i) \geq S.$$

Portanto, devemos ter, para todos $i < j$, $b_i \leq c_i \leq b_j \leq c_j$. Em geral, teremos

$$b_1 \leq c_1 \leq b_2 \leq c_2 \leq \cdots \leq b_n \leq c_n.$$

Logo, a soma máxima é $a_1 a_2 + a_3 a_4 + \cdots + a_{2n-1} a_{2n}$.

12. Adapte, ao presente caso, a ideia da prova da desigualdade do rearranjo.

13. Para o item (a), basta ver que

$$\begin{aligned} a(x + y - a) - xy &= (ax - xy) + a(y - a) = -x(y - a) + a(y - a) \\ &= (y - a)(a - x) \geq 0, \end{aligned}$$

uma vez que $y \geq a \geq x$. Quanto ao item (b), queremos provar que, dados $n > 1$ e reais positivos $x_1, \ldots, x_n$, tem-se sempre

$$\text{MA}\,(x_1, \ldots, x_n) \geq \text{MG}\,(x_1, \ldots, x_n),$$

onde MA e MG denotam respectivamente média aritmética e média geométrica. Para isso podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 \leq \cdots \leq x_n$, com $x_1 < x_n$. Seja ainda $a = \text{MA}\,(x_1, \ldots, x_n)$. Segue que $x_1 < a < x_n$. Imitando a prova do item (a), obtemos $a(x_1 + x_n - a) > x_1 x_n$, de modo que

$$\text{MA}\,(x_1 + x_n - a, x_2, \ldots, x_{n-1}, a) = \text{MA}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

e

$$\text{MG}\,(x_1 + x_n - a, x_2, \ldots, x_{n-1}, a) > \text{MG}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n).$$

Se os números $x_1 + x_n - a, x_2, \ldots, x_{n-1}, a$ forem todos iguais, teremos

$$\text{MA}\,(x_1 + x_n - a, x_2, \ldots, x_{n-1}, a) = \text{MG}\,(x_1 + x_n - a, x_2, \ldots, x_{n-1}, a)$$

e, daí,

$$\text{MA}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a) > \text{MG}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a).$$

Senão, ordenamos tais números como $y_1 \leq \cdots \leq y_n$, com $y_1 < y_n$. Como $\text{MA}\,(y_1, \ldots, y_n) = a$, segue que $y_1 < a < y_n$. Trocando agora y_1 por $y_1 + y_n - a$ e y_n por a obtemos, como acima,

$$\text{MA}\,(y_1 + y_n - a, y_2, \ldots, y_{n-1}, a) = \text{MA}\,(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$$

e

$$\text{MG}\,(y_1 + y_n - a, y_2, \ldots, y_{n-1}, a) > \text{MG}\,(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n).$$

Veja que, dentre os números $y_1 + y_n - a, y_2, \ldots, y_{n-1}, a$ há ao menos dois iguais a a. Se os números $y_1 + y_n - a, y_2, \ldots, y_{n-1}, a$ forem todos iguais, teremos

$$\text{MA}\,(y_1 + y_n - a, y_2, \ldots, y_{n-1}, a) = \text{MG}\,(y_1 + y_n - a, y_2, \ldots, y_{n-1}, a)$$

e, daí,

$$\text{MA}\,(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \text{MG}\,(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n).$$

Senão, operamos uma terceira troca, como acima. Observe que esse algoritmo termina após um número finito de passos, quando todos os números de nossa lista serão iguais a a. Quando isso ocorrer, as médias aritmética e geométrica dos números serão iguais. Mas, como cada operação que fizemos preserva a média aritmética e aumenta a média geométrica segue que, inicialmente, tínhamos

$$\text{MA}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a) > \text{MG}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a).$$

14. Faça a prova por indução sobre $n > 1$ inteiro. Para o passo de indução, basta provar que

$$\left(1+\frac{a_n^2}{a_{n+1}}\right)\left(1+\frac{a_{n+1}^2}{a_1}\right) \geq \left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)(1+a_{n+1})$$

ou, equivalentemente, que

$$a_{n+1}^2 \cdot \frac{1}{a_1} + a_n^2 \cdot \frac{1}{a_{n+1}} \geq a_{n+1} + \frac{a_n^2}{a_1}.$$

Por fim, observe que tal desigualdade é uma aplicação imediata da desigualdade do rearranjo.

15. (Por Emanuel Augusto de Souza Carneiro.) Façamos uma prova por indução sobre n, deixando o caso inicial $n = 3$ como exercício. Mais precisamente, mostremos que, a fim de maximizar a expressão do primeiro membro, um dos x_i's deve ser igual a 0, com o quê recairemos na hipótese de indução. Para tanto, seja

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_4 + \cdots + x_n^2 x_1.$$

e suponha que a expressão assume seu valor máximo[2] para alguma sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que nenhum dos x_i's é igual a 0. Substituindo x_{n-1} por 0 e x_1 por $x_1 + x_{n-1}$, obtemos uma nova expressão, a qual é menor ou igual que a original, i.e., é tal que

$$\begin{aligned} 0 &\geq E(x_1 + x_{n-1}, x_2, \ldots, 0, x_n) - E(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ &= 2x_1 x_2 x_{n-1} + x_2 x_{n-1}^2 + x_{n-1} x_n^2 - x_{n-2}^2 x_{n-1} - x_{n-1}^2 x_n. \end{aligned}$$

Dividindo esta última expressão por x_{n-1}, obtemos

$$2x_1 x_2 + x_2 x_{n-1} + x_n^2 - x_{n-2}^2 - x_{n-1} x_n \leq 0.$$

[2]Aqui, estamos supondo, implicitamente, que existe uma sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tal que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ e $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é máximo. Apesar desse fato poder ser provado rigorosamente, uma tal demonstração foge ao escopo dessas notas, de forma que não a apresentaremos aqui.

Executando, de maneira análoga à acima, as operações de troca

$$x_{i-1} \mapsto 0 \quad \text{e} \quad x_{i+1} \mapsto x_{i+1} + x_{i-1},$$

para $1 \leq i \leq n$ (com $x_0 = x_n$ e $x_{n+1} = x_1$), obtemos as desigualdades

$$2x_{i+1} x_{i+2} + x_{i+2} x_{i-1} + x_i^2 - x_{i-2}^2 - x_{i-1} x_i \leq 0,$$

para $1 \leq i \leq n$. Somando todas estas expressões, chegamos à desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (x_{i+1} + x_{i+3}) \leq 0,$$

o que é um absurdo. Logo, a fim de que a sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maximize a expressão $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ao menos um dos x_i's deve ser igual a 0. Suponha, sem perda de generalidade, que $x_n = 0$. Então

$$\begin{aligned} E_{\max} &= E(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \\ &= x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_4 + \cdots + x_{n-2}^2 x_{n-1} \\ &\leq x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_4 + \cdots + x_{n-2}^2 x_{n-1} + x_{n-1}^2 x_1 \\ &\leq \frac{4}{27}, \end{aligned}$$

onde, na última desigualdade, utilizamos a hipótese de indução.)

17. Faça $\lambda_i = b_i/a_i$, para $1 \leq j \leq n$, e conclua que

$$b_1 + \cdots + b_n \geq a_1 + \cdots + a_n \Leftrightarrow a_1(\lambda_1 - 1) + a_2(\lambda_2 - 1) + \cdots + a_n(\lambda_n - 1) \geq 0.$$

Em seguida, aplique a desigualdade de Abel para concluir que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\lambda_j - 1) \geq a_1 \cdot \min\{\lambda_1 - 1, \lambda_1 + \lambda_2 - 2, \ldots, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n - n\}.$$

Por fim, use a condição do enunciado e a desigualdade entre as médias para mostrar que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq k$.

APÊNDICE A

Glossário

APMO: Asian-Pacific Mathematical Olympiad.

Áustria-Polônia: Olimpíada de Matemática Austro-Polonesa.

BMO: Balkan Mathematical Olympiad.

Baltic Way: Baltic Way Mathematical Contest.

Crux: Crux Mathematicorum, periódico de problemas da Sociedade Canadense de Matemática.

IMO: International Mathematical Olympiad.

Israel-Hungria: Competição Binacional Israel-Hungria.

Miklós-Schweitzer: Miklós-Schweitzer Mathematics Competition (a principal competição universitária de Matemática da Hungria).

NMC: Nordic Mathematical Contest.

OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática.

OBMU: Olimpíada Brasileira de Matemática para Universitários.

OCM: Olimpíada Cearense de Matemática.

OCS: Olimpíada de Matemática do Cone Sul.

OIM: Olimpíada Ibero-americana de Matemática.

OIMU: Olimpíada Ibero-americana de Matemática Universitária.

ORM: Olimpíada Rioplatense de Matemática.

Putnam: The William Lowell Mathematics Competition (a principal competição universitária de Matemática dos Estados Unidos).

Torneio das Cidades: The Tournament of the Towns (olimpíada intermunicipal mundial de Matemática).

Referências Bibliográficas

[1] AIGNER, M. e ZIEGLER, G. (2010) *Proofs from THE BOOK*. Springer-Verlag.

[2] ANDREWS, G. (1994). *Number Theory*. Dover.

[3] AKOPYAN, A. V. e ZASLAVSKY A. A. (2007). *Geometry of Conics*. American Mathematical Society.

[4] APOSTOL, T. (1967). *Calculus, Vol. 1*. John Wiley & Sons.

[5] APOSTOL, T. (1967). *Calculus, Vol. 2*. John Wiley & Sons.

[6] APOSTOL, T. (1976). *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag.

[7] DE BARROS, A. A. e ANDRADE, P. F. DE A. (2009). *Introdução à Geometria Projetiva*. Sociedade Brasileira de Matemática.

[8] BARBOSA, J. L. M. (2004). *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática.

[9] BARBOSA, J. L. M. (1995). *Geometria Hiperbólica.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[10] CARVALHO, P. C. P. (2002). *Introdução À Geometria Espacial.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[11] CHERMAN, A. (2004). *Sobre os Ombros de Gigantes.* Jorge Zahar.

[12] COHEN, L. W. e EHRLICH, G. (1963). *The structure of the real number system.* D. Van Nostrand.

[13] CONWAY, J. B. (1978). *Functions of One Complex Variable I.* Springer-Verlag.

[14] DE MORAIS FILHO, D. C. (2012). *Um Convite à Matemática.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[15] COXETER, H. S. M. e GREITZER, S. L. (1967). *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America.

[16] DIESTEL, R. (2000). *Graph Theory.* Springer-Verlag.

[17] DILWORTH, R. (1950). *A decomposition theorem for partially ordered sets*, Ann. Math. **51**, 161-166 .

[18] ERDÖS, P. e SZEKERES, G. (1935). *A combinatorial problem in geometry*, Comp. Math. **2**, 463-470.

[19] FEITOSA, S. B. (2006) *O teorema de Turán*, Sigma **3**, 2-4.

[20] DE FIGUEIREDO, D. G. (1996). *Análise I.* LTC.

[21] DE FIGUEIREDO, D. G. (2002). *Números Irracionais e Transcendentes.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[22] GARCIA, A. e LEQUAIN, Y. (2002). *Elementos de Álgebra.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[23] GONÇALVES, A. (1999). *Introdução à Álgebra.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[24] HEATH, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Dover.

[25] HILBERT, D. e COHN-VOSSEN, S. (1999). *Geometry and Imagination.* American Mathematical Society.

[26] HOFFMAN, K. e KUNZE, R. (1971). *Linear Algebra.* Prentice-Hall.

[27] HONSBERGER, R. (1985). *Mathematical Gems III.* The Mathematical Association of America.

[28] HONSBERGER, R. (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry.* The Mathematical Association of America.

[29] LIMA, H. N. (2011). *Limites e Funções Aritméticas.* Preprint.

[30] IEZZI, G. e POMPEO, J. N. (1991). *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Vol. 9.* Atual Editora.

[31] JOHNSON, R. (2007). *Advanced Euclidean Geometry.* Dover.

[32] LANDAU, E. (2002). *Teoria Elementar dos Números.* Ciência Moderna.

[33] LIMA, E. L. (1997). *Medida e Forma em Geometria.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[34] LIMA, E. L. (2004). *Curso de Análise, Vol.* 1. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[35] LIMA, E. L. (2009). *Curso de Análise, Vol. 2.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[36] LOZANSKY, E. e ROUSSEAU, C. (1996). *Winning Solutions.* Springer-Verlag.

[37] MITRINOVIC, D. (1964). *Elementary Inequalities.* Noordhoff.

[38] MOREIRA, C. G. e KOHAYAKAWA, Y. (2001). *Tópicos em Combinatória Contemporânea.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[39] NUSSENZVEIG, H. M. (2002). *Curso de Física Básica, Vol. 1.* Edgard Blucher.

[40] ROBERTS, J. (1978). *Elementary number theory: a problem oriented approach.* MIT Press.

[41] RUDIN, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, Inc.

[42] SCHEINERMAN, E. (2010). *Matemática Discreta, uma Introdução.* Cengage Learning.

[43] SINGH, S. (1998). *O Último Teorema de Fermat.* Record.

[44] STEIN, E. e SHAKARCHI, R. (2003). *Fourier Analysis. An Introduction.* Princeton University Press.

[45] STEWART, I. (2007). *Uma História da Simetria na Matemática.* Jorge Zahar.

[46] TENT, M. B. W. (2006). *Prince of Mathematics: Carl Friedrich Gauss.* A. K. Peters Ltd.

[47] TURÁN, P. (1941). *An extremal problem in graph theory.* Mat. Fiz. Lapok **41**, 435-452.

[48] VAINSENCHER, I. (1996). *Introdução às Curvas Algébricas Planas.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[49] VAN LINT, J. H. e WILSON, R. M. (2001). *Combinatorics.* Cambridge University Press.

[50] WILF, H. (1994). *Generatingfunctionology.* Academic Press.

[51] YAGLOM, I. M. (1962). *Geometric Transformations I.* The Mathematical Association of America.

Índice Remissivo

Abel
- desigualdade de, 194
- identidade de, 194
- Niels H., 59
- Niels Henrik, 194

Algébrica
- expressão, 36
- identidade, 37
- operação, 36

Algoritmo, 70
- da divisão, 2
- da divisão para polinômios, 65
- saída de um, 70

Aproximação
- de uma raiz quadrada, 138
- por falta de um número, 4

Arquimedes, 28

Associatividade
- da adição, 7
- da multiplicação, 7

Axioma, 126

axioma, 6

axiomas
- da adição e multiplicação, 7
- da relação de ordem em $\mathbb{R}$, 10, 11

Bhaskara
- fórmula de, 53
- II, 46

Binômio
- de Newton, 149
- fórmula do, 149
- termo geral, 151

Cardano, Girolamo, 59, 60

Cauchy, Augustin Louis, 179

Chebyshev
- desigualdade de, 186
- Pafnuty, 186

Coeficiente

de um monômio, 36
de um polinômio, 37
Completamento de quadrados, 52
Completude de $\mathbb{R}$, 18
Comutatividade
da adição, 7
da multiplicação, 7
Conjunto
ínfimo de, 30
denso, 33
dos inteiros, 1
dos naturais, 1
dos racionais, 1
dos reais, 7
limitado, 27
limitado inferiormente, 27
limitado superiormente, 27
supremo de um, 30
Cota
inferior, 27
inferior, maior, 30
superior, 27
superior, menor, 29
Cubo de um número, 13

Definição
por recorrência, 90
recursiva, 90
del Ferro, Scipione, 59
Desigualdade
de Abel, 194
de Cauchy, 179
de Chebyshev, 186
do rearranjo, 190
entre as médias, 168, 182
ponderada entre as médias, 176
triangular, 160, 162, 182
Desigualdades algébricas, 160
Discriminante, 52
Distributividade da multiplicação, 7
Divisão
algoritmo da, 2
quociente de uma, 2
resto de uma, 2

Elemento neutro
da adição, 7
da multiplicação, 7
Eliminação Gaussiana, 70
Equação
a uma variável, 47
bicúbica, 62
biquadrada, 61
característica, 106
conjunto solução de uma, 47
de primeiro grau, 47
de segundo grau, 51
incógnita da, 47
modular, 48
polinomial de grau n, 59
raiz de uma, 47
recíproca, 62, 67
Escalonamento, 70

Expressão
algébrica, 36
polinomial, 37

Fórmula
de Báskara, 46, 53
de expansão trinomial, 157
de Viète, 41, 54
do binômio, 149
do radical duplo, 46
Fatoração, 39
Fatorial, 117, 141
Fibonacci
fórmula posicional para a sequência de, 106
sequência de, 106

Galois, Évariste, 59, 60
Gauss, Johann Carl Friedrich, 71

Indução
demonstração por, 127, 130
forte, 133
hipótese, 131
passo de, 131
primeiro princípio de, 126, 129
segundo princípio de, 133
Inequação, 159
Intervalo, 25
aberto, 26
aberto à direita, 26
aberto à esquerda, 26
comprimento de um, 25
extremidades de um, 25
fechado, 26
fechado à direita, 26
fechado à esquerda, 26
finito, 25
ilimitado, 25
infinito, 25
limitado, 25
Inverso
aditivo, 8
multiplicativo, 8

Lagrange
identidade de, 152
Joseph Louis, 153
Limitado
conjunto, 27
inferiormente, conjunto, 27
intervalo, 25
superiormente, conjunto, 27

Média
aritmética, 168
geométrica, 168
quadrática, 182
Médias
desigualdade ponderada entre as, 176
Método
axiomático, 6
Módulo, 47
Monômio, 36

Número
binomial, 142
complexo, 154
inteiro, 1
irracional, 18
natural, 1
negativo, 11
racional, 1
real, 7
trinomial, 156
Newton
binômio de, 149
Isaac, 149
Notação
$\prod$, 113
$\sum$, 113

PA, 93
caracterização recursiva de, 93, 94
de segunda ordem, 115
razão de uma, 93
soma dos k primeiros termos de uma, 95
termo geral de uma, 95
Pascal
Blaise, 144
triângulo de, 143
Perfeito
cubo, 19
quadrado, 19
PG, 96
caracterização recursiva de, 96
caracterização recursiva de uma, 97
razão de uma, 96
soma dos k primeiros termos de uma, 97
termo geral de uma, 97
Pitágoras
de Samos, 24
teorema de, 23, 202
Polinômio, 37
postulado, 6
Potência
$n^{\underline{a}}$, 13
perfeita, 19
Princípio fundamental da contagem, 138
Produtório, notação de, 118
Produto
notável, 38
telescópico, 119
Progressão
aritmética, 93
geométrica, 96
Propriedade
Arquimediana, 27

Quadrado
de um número real, 13

Racional
diádico, 33
Radiciação, 19

Raiz
n−ésima de um real positivo, 18
índice de uma, 18
cúbica de um real positivo, 19
quadrada de um real positivo, 19
Recorrência, 91
linear de primeira ordem e com coeficientes constantes, 102
linear de segunda ordem com coeficientes constantes, 103
Regras de sinal, 13
Relação
de ordem, 10
de recorrência, 91
de Stiefel, 142
Relações entre coeficientes e raízes, 65
Representação
binária, 134
decimal, 4
Representação decimal, 18
Reta numerada, 24

Semi-reta
negativa, 22
positiva, 22
Sequência, 4
$k^{\underline{o}}$ termo de uma, 89
índice de uma, 91
constante, 113
de Fibonacci, 106
de Fibonacci, fórmula posicional para a, 106
fórmula posicional para uma, 90
finita, 89
infinita, 89
periódica, 5
Sistema
de equações, 69
de segundo grau, 80
impossível, 73, 75, 76
incompatível, 73
linear de equações, 70
linear, coeficientes de um, 70
possível determinado, 73, 76
possível indeterminado, 73, 75, 77
Soma telescópica, 115
Somatório, notação de, 113
Stiefel, relação de, 142
Substituição de variável, 54
Supremo, 30

Tartaglia, Niccolò, 59, 60
Teorema
das colunas, 146
das diagonais, 147
das linhas, 153
de Zeckendorff, 140
Transformação de Ravi, 173
Triângulo

de Pascal, 143
Trinômio de segundo grau, 41, 52
coeficientes de um, 52
fatoração de um, 41, 42
forma canônica de um, 52
forma fatorada de um, 56

Variáveis, 36
Viète
fórmula de, 41
François, 42

Zeckendorff, teorema de, 140

(continuação dos títulos publicados)

- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 6 - Polinômios* - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. Pinto Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - Abramo Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P.C.P. Carvalho

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.

(continuação dos títulos publicados)

- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - D. Pellegrino, E. Teixeira e G. Botelho
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marquez
- *Introdução à Geometria Hiperbólica* - O modelo de Poincaré - P. Andrade

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1a a 8a* - E. Mega, R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9a a 16a* - C. Moreira, E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Shine
- *Iniciação à Matemática: Um curso com problemas e soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira